Valószínűségszámítási feldatok megoldása CASIO zsebszámológéppel (és matematikai ezközökkel)

Dr.Wintsche Gergely
Budapest

CASIO

Kedves felhsználók!

Összeállítottam néhány feladatot a tanárszakos hallgatók egyetemi anyagából, melyben intenzíven lehet használni néhány olyan funkciót, amelyek az utóbbi néhány évben jelentek meg a kisebb teljesítményű zsebszámológépeken. Ilyenek a szumma, a határozott integrál és a derivált numerikus meghatározása, illetve néhány alapvető eloszlás értékeinek kiszámítása, mint a normális-, binomiális-, Poisson-eloszlás. A feladatok főiskolai-egyetemi ismereteket használnak fel, de nem lépnek túl az alap eloszlások várható értékének és szórásának ismeretén, valamint a Markov- és Csebisev-egyenlőtlenségen.
A legszebb és legpontosabb közelítéseket persze a centrális határeloszlás-tétel alkalmazásával kapjuk.
A CASIO fx-991 CEX zsebszámológép alkalmazásával elfelejthetjük a táblázatok használatát, legalábbis az alapvető eloszlások esetében.

A szerző

Budapest, 2017
Szerző és szerkesztő: Wintsche Gergely

Köszönet Csiszár Villőnek néhány feladatért.

1. Használjuk a szumma gombot

1.1. Feladat

Felváltva dobok egy piros és egy fehér dobókockával, a pirossal kezdve. Addig dobok velük, amíg a pirossal párost nem dobok, vagy a fehér kockán dobott szám osztható lesz hárommal. Legyen X az ehhez szükséges dobások száma. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét!

1.1. Megoldás

Készítsünk táblázatot a keresett valószínűségekhez! Egy páros dobás valószínűsége persze 1/2, hiszen P(2 vagy 4 vagy 6) = 1/2 és P(3 vagy 6) = 1/3.

Annak valószínűsége, hogy elsőre párost dobunk 1/2. Akkor fejezzük be második dobással, ha elsőre nem párost dobunk és másodikra hárommal oszthatót, azaz 1/2 · 1/3 = 1/6. Nézzük meg annak valószínűségét, hogy az 5. dobásra fogjuk befejezni. Ekkor az egyes dobások valószínűsége sorban 1/2, 2/3, 1/2, 2/3 és végül 1/2. A valószínűség 1/2 · 2/3 · 1/2 · 2/3 · 1/2 = 1/18. Folytatva a táblázat kitöltését az alábbiakat kapjuk.

	Dobások száma	Valószínűség
P_1	1	1/2
F_1	2	1/2 · 1/3 = 1/6
P_2	3	1/2 · 2/3 · 1/2 = 1/6
F_2	4	1/2 · 2/3 · 1/2 · 1/3 = 1/18
P_3	5	1/2 · 2/3 · 1/2 · 2/3 · 1/2 = 1/18
F_3	6	1/2 · 2/3 · 1/2 · 2/3 · 1/2 · 1/3 = 1/54
…	…	…
P_i	$2i - 1$	$(1/3)^{i-1} \cdot 1/2$
F_i	$2i$	$(1/3)^{i} \cdot 1/2$
…	…	…

A várható érték $E = \sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}2i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\cdot\frac{1}{2}$

Rengeteg különböző lehetőség kínálkozik egy ilyen összeg kiszámítására, de az egyik leggyorsabb a zsebszámológép használata. Zsebszámológéppel persze nem fogunk végtelenig összegezni. Külön módszertani kérdés lehet annak megválaszolása, mikor meddig érdemes egy ilyen szummát összegezni, hogy elegendően pontos eredményt kapjunk. Ezt a kérdést most nem válaszoljuk meg, de felső értéknek a 100 választása bőségesen elegendő lesz.

1. Használjuk a szumma gombot

A két összeg:

(Megjegyzés: a számológép azokat a kifejezéseket összegzi, amelyek a gép által adott nyitó és csukó zárójelek közé esnek!)

$$\sum_{x=1}^{100}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\right) \qquad \frac{3}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{100}\left(x\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right) \qquad \frac{3}{4}$$

Tehát az átlag a két szumma összege, azaz $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}=2{,}25$.

Kiegészítés:

Természetesen hasonló eredményre juthatunk némi számolással is. Emlékeztetünk arra, hogy a mértani sor összege $|p|<1$ esetén:

$$1+p+p^2+p^3+\ldots=\frac{1}{1-p} \quad \text{ha} \quad |p|<1$$

Egy X valószínűségi változó geometriai (Pascal) eloszlású, p paraméterel, ha

$$P(X=i)=(1-p)^{i-1}\cdot p \quad \text{ahol} \quad i=1,\ldots,\infty$$

Egy geometriai eloszlású X valószínűségi változó várható értéke $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot p\cdot(1-p)^{i-1}=\frac{1}{p}$.

Kicsit átrendezzük a feladatban a várható értékre kapott összegeket.

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}2i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\cdot\frac{1}{2}= \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{2}+2i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}= \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}i-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{3}i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}= \\
&= 2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}}_{*}-\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}}_{**}=2\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

* Egy $p = 2/3$ paraméterű geometriai eloszlás várható értékének a kétszerese.

** Egy geometriai sor összegének a fele.

Természetesen ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a számológép segítségével.

1. Használjuk a szumma gombot

Feladat 1.2.

A magyarországi kalsszikus lottón 90-ből 5-öt számot kell bejelölni, és a hétvégén kihúznak 5 számot. A húzás után ezeket növekvő sorrendben teszik közzé. Legyen az öt szám $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$.

a) Egyszerű kérdés az, hogy mi lesz a kihúzott középső számok átlaga, azaz $E(x_3)$.

b) Mennyi a kihúzott legkisebb számok átlaga, azaz $E(x_1)$?

Megoldás 1.2.

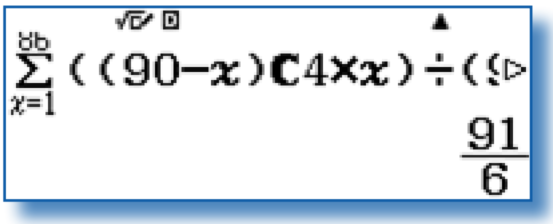
a) Szimmetria miatt könnyű látni, hogy a középső szám várható értéke, $E(x_3) = 45{,}5$.

b) Erre a feladatra nem annyira nyilvánvaló a válasz, mint az a) részre. Írjuk fel annak valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám i és x_1 várható értékét:

$$P(i) = \frac{\binom{90-i}{4}}{\binom{90}{5}} \qquad E(X_1) = \frac{\sum_{i=1}^{86} i \cdot \binom{90-i}{4}}{\binom{90}{5}}$$

Zsebszámológéppel összegezve: $E(X_1) = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}$.

(Óvatosan vigyük be az összegzést, ügyeljünk a zárójelek használatára!)



Kiegészítés:

Hogyan lehet megkapni az összeget számológép használata nélkül? Írjuk fel a kifejezés számlálóját, szumma jelek nélkül.

$$\sum_{i=1}^{86} i \cdot \binom{90-i}{4} = 1 \cdot \binom{89}{4} + 2 \cdot \binom{88}{4} + 3 \cdot \binom{87}{4} + \ldots + 84 \cdot \binom{6}{4} + 85 \cdot \binom{5}{4} + 86 \cdot \binom{4}{4}$$

1. Használjuk a szumma gombot

A kifejezés végén írhatunk $\binom{5}{5}$-öt a $\binom{4}{4}$ helyett, a szorzót pedig érdemes 86 = 85 + 1 alakba írni, hogy alkalmazhassuk a Pascal-háromszög képzési szabályát $\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\binom{6}{5}$. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{86} i\cdot\binom{90-i}{4}=1\cdot\binom{89}{4}+2\cdot\binom{88}{4}+3\cdot\binom{87}{4}+\ldots+84\cdot\binom{6}{4}+\underbrace{85\cdot\binom{5}{4}+85\cdot\binom{5}{5}}_{85\cdot\binom{6}{5}}+\binom{5}{5}=$$

$$=1\cdot\binom{89}{4}+2\cdot\binom{88}{4}+3\cdot\binom{87}{4}+\ldots+84\cdot\binom{6}{4}+84\cdot\binom{6}{5}+\binom{6}{5}+\binom{5}{5}=$$

$$=\binom{90}{5}+\binom{89}{5}+\binom{88}{5}+\ldots+\binom{8}{5}+\binom{7}{5}+\binom{6}{5}+\binom{5}{5}=\binom{91}{6}$$

Az utolsó lépésben az úgynevezett zokini (vagy csizma) szabályt használtuk a Pascal-háromszögben.

A várható érték $\dfrac{\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}}=\dfrac{91}{6}=15\dfrac{1}{6}$, ahogy azt a számológéppel is kaptuk.

Megjegyzés 1.: Ha egy kicsit mélyebben belegondolunk, akkor láthatjuk, hogy nem csupán a középső szám helyezkedik el szimmetrikusan az 1, ..., 90 számok között, hanem a kíhúzott számok átlagai is. Az átlagok igyekeznek egyenletesen kitölteni a rendelkezésre álló teret, és ezért a rendezett számötösök tagjainak várható értékei (átlagai) rendre a következők lesznek: $15\frac{1}{6}$; $30\frac{2}{6}$; $45\frac{3}{6}$; $60\frac{4}{6}$; $75\frac{5}{6}$.

Megjegyzés 2.:

1957-től 2017 december 7-ig 3170 lottóhúzás volt. A tapasztalati átlagok nagyon jó egyezést mutatnak az elméletileg várt értékekkel.

15,03470032; 29,9340694; 45,66340694; 60,5659306; 75,48832808

1. Használjuk a szumma gombot

Feladat 1.3.

Egy szabályos oktaéder lapjait megszámoztuk 1-től 8-ig, és addig dobunk vele, míg 5-nél nagyobbat kapunk. Határozzuk meg a dobott számok összegének várható értékét!

Megoldás 1.3.

Nyilván minden érték 1/8 valószínűségű. Az is nyilvánvaló, hogy nincsen esélyünk minden egyes eset valószínűségének a felírására. Például ha csak 10-re dobunk 5-nél nagyobbat, akkor előtte, $9 \cdot 1 = 9$-től $9 \cdot 5 = 45$-ig mindenféle összeg előfordulhat különböző esélyekkel. Legyen X a kívánt valózínűségi változó és idézzük fel a teljes várható érték tételét.

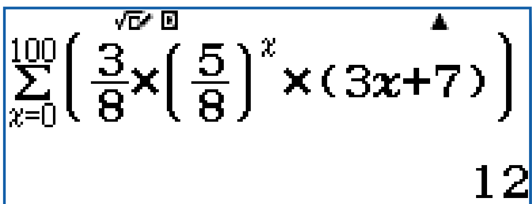
Ha $\{A_j\}$ egy teljes eseményrendszer és ismerjük az egyes várható értékeket az eseményrendszer egyes eseményeinek bekövetkezte esetén (jelölje $E(X|A_j)$), akkor a teljes várható érték $E(X) = \sum_j E(X \mid A_j) \cdot P(A_j)$ ahol j a teljes eseményrendszer minden indexén végigfut.

Viszonylag könnyű felírni annak valósíznűségét, hogy először j-re fogunk 5-nél nagyobbat dobni, jelölje ezt A_j. Ezek az események persze páronként kizárják egymást, úgyhogy választhatjuk ezeket teljes eseményrendszernek, és az átlagokat sem nehéz felírni.

Dobások száma	A_j valószínűsége	Az átlag A_j esetén
1	3/8	7
2	$5/8 \cdot 3/8$	3 + 7
3	$5/8 \cdot 5/8 \cdot 3/8$	3 + 3 + 7
4	$5/8 \cdot 5/8 \cdot 5/8 \cdot 3/8$	3 + 3 + 3 + 7
…	…	…
i	$(5/8)^{i-1} \cdot 3/8$	$3(i-1)+7$
$i+1$	$(5/8)^{i} \cdot 3/8$	$3i+7$
…	…	…

Kapjuk hogy $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^i \cdot (3i+7)$.

Számológéppel 100-ig összegezve a szumma értéke 12.



Kiegészítés:

Hasonló algebrai átalakításokkal, mint amelyeket korábban már használtunk kapjuk, hogy

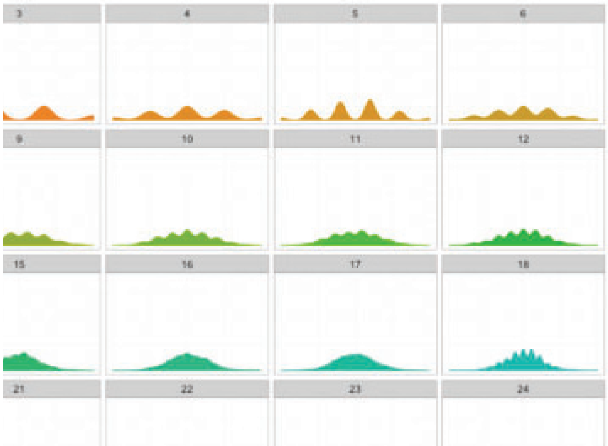
$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{i}\cdot(3i+7)=3\cdot\frac{5}{8}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{i-1}\cdot i}_{*}+7\cdot\frac{3}{8}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^{i}}_{**}=3\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{3}+7\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=5+7=12$$

* Ez az összeg egy 3/8 paraméterű geometriai elsozlás várható értéke.

** Ez egy mértani sorozat összege.

2. A centrális határeloszlás-tétel

Ismert tény, hogy ha egy kísérletet sokszor ismétlünk és az eredményeket összeadjuk, azaz egy valószínűségi változó példányait összegezzük, akkor határeloszlásként normális eloszlást kapunk. Van persze néhány feltétel, de ezek a példák többségében teljesülnek. Ha a valószínűségi változók összegét standardizáljuk, akkor a határeloszlás a standard normális eloszlás lesz.



Néhány valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvénye (forrás wikimedia)

Feladat 2.1.

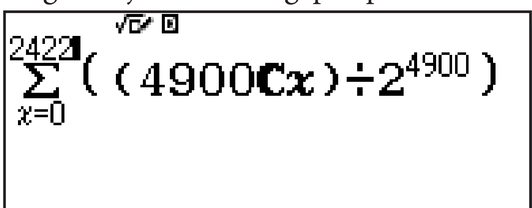
Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy szabályos érme feldobása során 4900 kísérletből legfeljebb 2422 fej lesz.

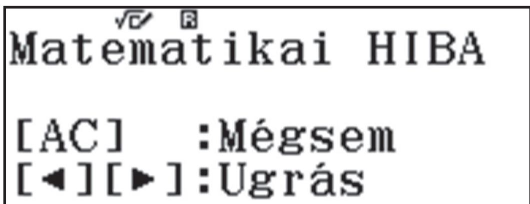
Megoldás 2.1.

Nyilvánvaló, hogy a kívánt valószínűséget fel tudjuk írni, és más módon (pl. Wolfram) ki is tudjuk számítani,

$$\sum_{i=0}^{2422}\binom{4900}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4900-i}\approx 0,216$$

de a számológépbe beütve hibaüzenetet (ERROR) kapunk.
Nem rontottunk el semmit, de a számok nagyságrendje meghaladja a számológép kapacitását.





2. A centrális határeloszlás-tétel

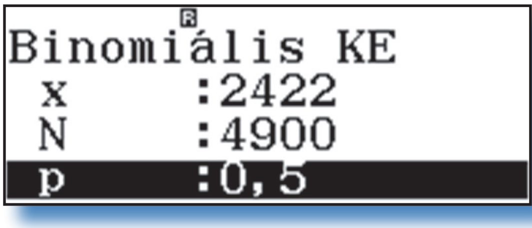
A képletben szereplő $\binom{4900}{i}$ például nagyon nagy, ha i elég nagy.

Hogyanszámolhatjuk ki mégis a kívánt valószínűséget?

Lépjünk be a 7:Eloszlás menübelépjünk eggyel lejjebb a nyíllal és válasszuk az 1:Binomiális KE, azaz a binomiális elsozlás kumulált értékeit, és az alapadatok 2:Változók szerinti megadását.

MENU 7 ▼ 1 2

Ha megadjuk a feladatbeli adatokat, akkor megkapjuk a kívánt választ a valószínűség értékére.



$$\sum_{i=0}^{2422}\binom{4900}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4900-i}\approx 0{,}216$$

Hogyan számolhat a számológép? Nyilván nem képes hatalmas számokkal műveleteket végezni. Nézzük meg, hogyan számolnánk, ha nem állna rendelkezésre közvetlenül a binomiális eloszlás.

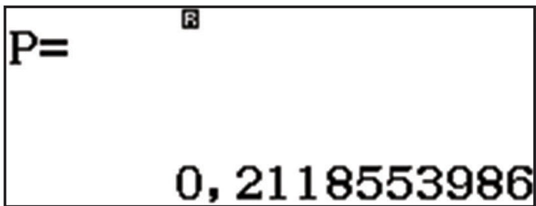
Jelölje a szokásoknak megfelelően a fejek számát X 4900 dobásból. Mint már korábban is elmondtuk, ez egy 4900-ad rendű 0,5 paraméterű binomiális eloszlás, ezért tekinthetem úgy is, hogy 4900 darab elsőrendű 0,5 paraméterű eloszlás összege (Bin(1; 0,5)), amelyik viszont már közel normális eloszlású a centrális határelsozlás-tétel miatt. Mi a görög μ és σ^2 betűket használjuk a standard normális eloszlás várható értékének és szórásnégyzetének a jelölésére, amit röviden N(μ, σ^2)-tel jelölünk. A mostani példában $\mu = E(X) = n \cdot p = 4900 \cdot 0{,}5 = 2450$ és a szórás $\sigma = D(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{4900 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 35$.

$$P(X<2422)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{2422-2450}{35}\right)=P(X_{\mathrm{std}}<-0{,}8)=\Phi(-0{,}8)=1-\Phi(0{,}8)\approx 0{,}212$$

A 0,212 eredmény viszonylag jó a korábban számított 0,216-hoz képest, az eltérés a két érték között kisebb, mint 2%.

MENU 7 2

A számológép segítségével is meghatározhatjuk a normális eloszlás értékét a kívánt helyen. Válasszuk a normális eloszlás kumulált értékeinek a meghatározását, és adjuk meg a megfelelő értékeket.



2. A centrális határeloszlás-tétel

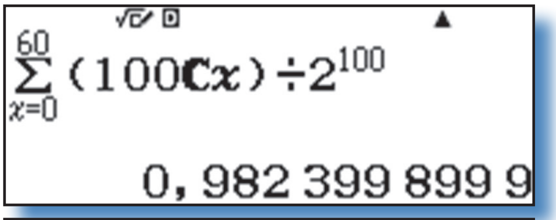
Feladat 2.2.

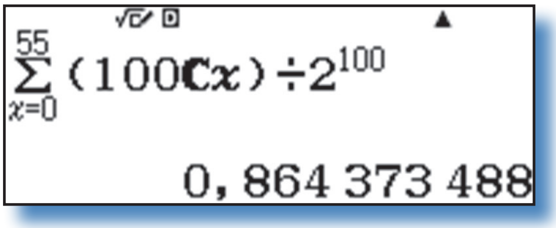
Egy konferencia 100 vendége vesz részt az ünnepi vacsorán. Mindenki két étel közül választhat, legyenek ezek A és B. Feltesszük, hogy a két fajta étle egyformán népszerű, azaz Mindenki egymástól függetlenül 0,5-0,5 valószínűséggel választja az A vagy a B vacsorát. Hány adagot kell készítsen a konyha, ha azt szeretnénk, hogy 90% valószínűséggel mindenkinek jusson az általa választott vacsorából?

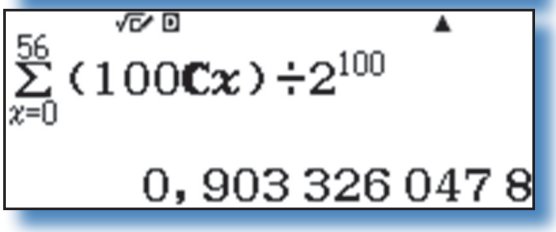
Megoldás 2.2.

Jelölje Z, azt, hogy hány ember választja az A menüt! Ekkor Z persze binomiális eloszlású, ahol $n = 100$ és $p = 0{,}5$. Ezzel együtt $100 - Z$ azok száma, akik a B menüt választják. Mind Z-re, mind $100 - Z$-re teljesülnie kell, hogy 0,9 valószínűséggel be kell következzen, tehát meg kell határozni azt a legkisebb k értéket, melyre $\sum_{i=0}^{k} \binom{100}{i} \cdot 0{,}5^{i} \cdot 0{,}5^{100-i} > 0{,}9$.

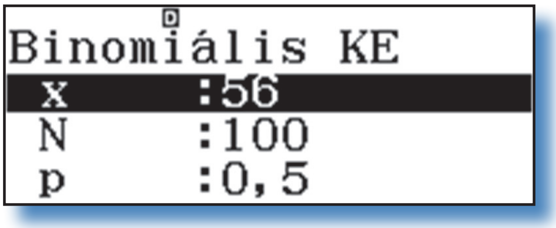
Ez utóbbit már tudjuk számolni a számológép szumma gombjának segítségével. Láthtjuk, hogy 60 adag nagyon sok, 55 még éppen kevés és 56 elegendő.

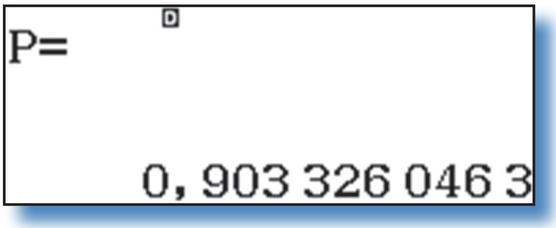






Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha használjuk a számológép eloszlásokat tartalmazó menüjét.





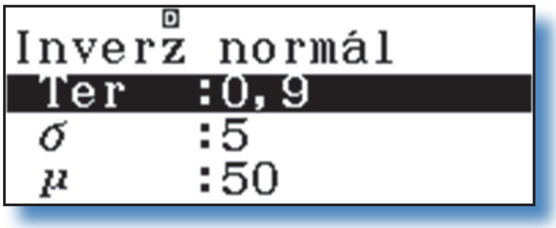
Használhatjuk a centrális határeloszlás-tételt is, a tervszerű próbálgatás helyett.

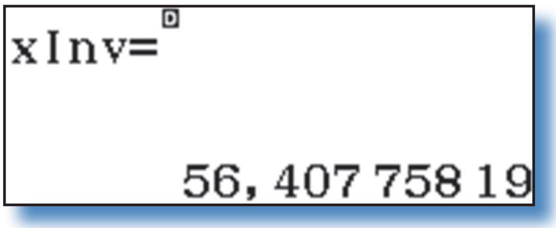
A várható érték és a szórás ismert,

$$E(Z) = np = 100 \cdot 0{,}5 = 50 \quad \text{és} \quad D(Z) = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{25} = 5$$

és keressük az eloszlásfüggvénynek azt az értéket, melyre a valószínűség még 0,9 alatt marad, $P(Z < x) < 0{,}9$.

A normális eloszlás inverze alapján





Az alsó határ tehát a közelítő formula alapján 56,408 értéket, felfelé kerekítve 57-et kapunk, amely mindössze eggyel tér el a pontos értéktől.

Kiegészítés:

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a számológép nélküli úton járunk, és csak a hagyományos táblázatot használjuk. Ebben az esetben mindig szükséges az adatok standardizálása, azaz $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ beállítása, majd a kapott eredmény visszatranszformálása.

$$P\left(\frac{Z-E}{D} < \frac{x-50}{5}\right) > 0{,}9$$

$$P\left(Z_{std} < \frac{x-50}{5}\right) > 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{x-50}{5}\right) > 0{,}9$$

$$\frac{x-50}{5} > \Phi^{-1}(0{,}9) \approx 1{,}28$$

$$x > 5 \cdot (1{,}28) + 50$$

$$x > 56{,}4$$

3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

Emlékeztetőülfelidézzük a két egyenlőtlenséget.

Markov-egyenlőtlenség
Ha X nemnegatív valószínűségi változó és létezik $E(X)$ várható értéke, akkor

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}, \quad \text{bármely } a > 0.$$

Csebisev-egyenlőtlenség
Ha X egy valószínűségi változó, melynek létezik $E(X)$ várható értéke és $D(X)$ szórása, akkor

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq b\right) \leq \frac{D^2(X)}{b^2}, \text{ minden } b > 0 \text{ esetén.}$$

Feladat 3.1.

200-szor lövünk egy céltábléra, és minden lövéssel 0,4 valószínűséggel találjuk el. Jelölje X a találatok számát. Becsüld meg a $P(X \geq 92)$ valószínűséget!

Megoldás 3.1.

A lövések száma binomiális eloszlást követ $E(X) = np = 200 \cdot 0,4 = 80$ és $D^2(X) = np(1-p) = 200 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 48$.

a) A Markov-egyenlőtlenség alapján $P(X \geq 92) = P(X \geq 92) \leq \frac{80}{92} = \frac{20}{23} \approx 0,8696$. Mindenki érezheti, hogy ez a becslés nagyon gyenge.

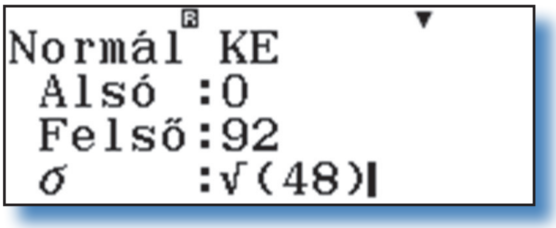
b) Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

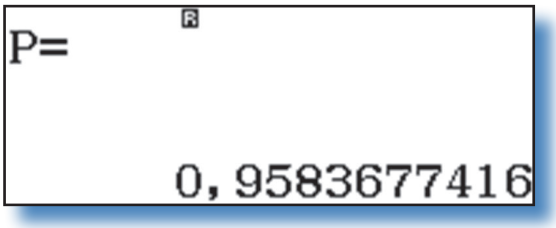
$$P(X \geq 92) = P(X - E \geq 92 - 80) = P(X - E \geq 12) = \frac{1}{2} P\left(\left|X - E\right| \geq 12\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{12^2} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

Ez a becslés már sokkal pontosabb, de még mindig nagyon messze van a valóságtól.

c) Használjuk a korábban megismert határeloszlás-tételt, mert a korábbi esetekben egész pontos eredményt szolgáltatott.

A 7-es menüben válasszuk a 2. opciót (Normál KE), azaz a normális (Kumulált eloszlás) részt és állítsuk be a paramétereket.

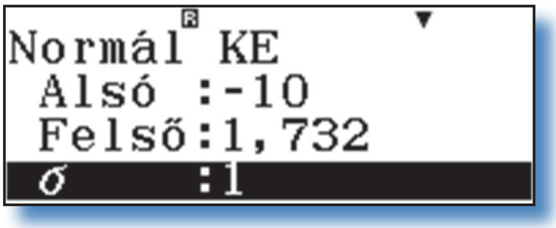


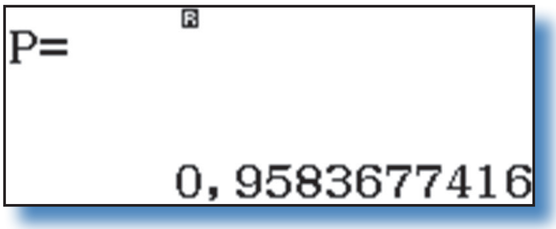


Ne felejtsük el, hogy $P(X \geq 92) = 1 - P(X < 92) = 1 - F(92)$ és a számológép az $F(92)$ érétket adja meg. Ez azt jelenti, hogy $P(X \geq 92) = 1 - P(X < 92) = 1 - F(92) \approx 1 - 0{,}9584 = 0{,}0416$.

Kiegészítés:

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha hagyományosan standardizálunk,

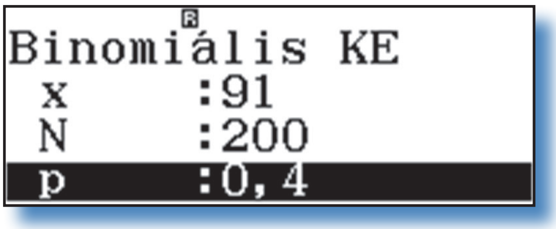


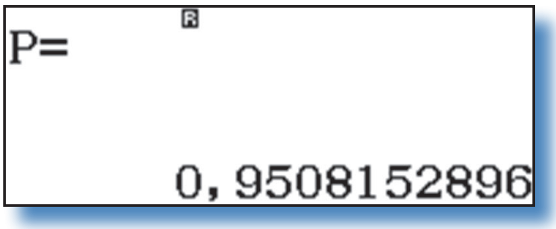


$$P(X \geq 92) = P(X \geq 92) = P\left(\frac{X - E}{D} \geq \frac{92 - 80}{\sqrt{48}}\right) =$$

$$= P\left(X_{\text{std}} \geq \sqrt{3}\right) = 1 - P\left(X_{\text{std}} < \sqrt{3}\right) \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{3}\right) \approx 1 - 0{,}9584 = 0{,}0416$$

d) A CASIO számológéppel akár a $P(X \geq 92)$ konkrét valószínűséget is meghatározhatjuk. Válasszuk a 7. menüben a kumulált binomiális eloszlást,





$P(X \geq 92) = 1 - P(X < 92) = 1 - F(91) \approx 1 - 0{,}9508 = 0{,}0492$

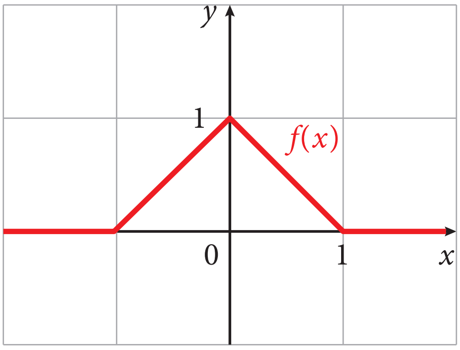
Ismét láthatjuk, hogy a centrális határeloszlás-tétel már nagyon jó becslést eredményez.

3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

Feladat 3.2.

Legyenek $X_1, X_2, \dots X_{100}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és sűrűségfüggvényük

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{ha } x\in[-1;1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Adjunk becslést a $P(X_1+X_2+\dots+X_{100}\geq 10)$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével.

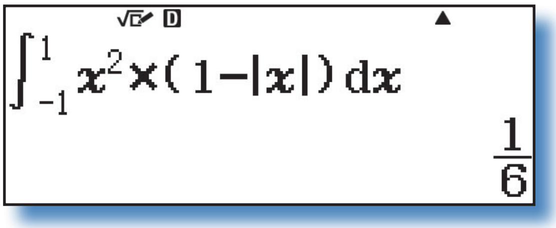
Megldás 3.2.

Számoljuk ki az $E(X_i)$ várható értékekeket.

Definíció szerint a várható érték a következő integrál, $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx$ de ennek értéke 0, mert az $1-|x|$ függvény szimmetrikus az y-tengelyre (páros függvény).

A szórás definíciója szerint $D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx\right)^2$

Használhatjuk a számológép integrál funkcióját, és kapjuk, hogy $D^2(X)=\frac{1}{6}$.



Természetesen ugyanezt az értéket kapjuk, ha elvégezzük az integrálást, az analízisből ismert módon:

$$D^2(X)=\int_{-1}^{1} x^2\cdot(1-|x|)\,dx=\int_{0}^{1} 2x^2\cdot(1-x)\,dx=\int_{0}^{1} 2x^2-2x^3\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$$

Térjünk vissza az eredeti kérdésre. A Csebisev egyenlőtlenség alapján a következő becslést kapjuk:

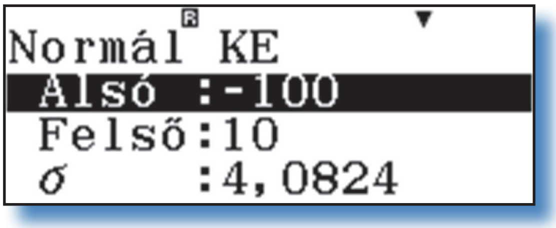
$$P(X_1+X_2+\dots+X_{100}\geq 10)=\frac{1}{2}P(|X_1+X_2+\dots+X_{100}|\geq 10)\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{D^2(X_1+X_2+\dots+X_{100})}{10^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{100\cdot\frac{1}{6}}{10^2}=\frac{1}{12}$$

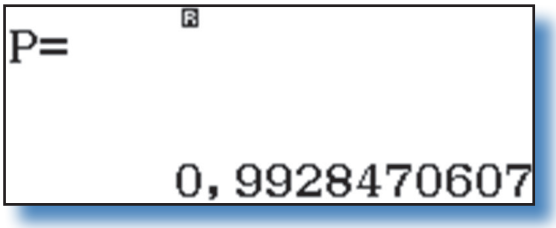
Pontosabb becsléshez használhatjuk a centrális határeloszlás-tételt. Legyen $Z=X_1+X_2+\dots+X_{100}$.

Korábban kiszámoltuk, hogy $\mu=E(Z)=0$ és $\sigma^2=D^2(Z)=\frac{100}{6}\approx 16{,}6667 \quad\Rightarrow\quad \sigma=D(Z)\approx 4{,}0825$.

3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

Használjuk a kiszámolt pramétereket, a $P(Z \geq 10) = 1 - P(Z < 10)$ összefüggést és a zsebszámológépet. A szokásos 7. menüben kapjuk, hogy





$P(Z \geq 10) = 1 - P(Z < 10) \approx 1 - 0{,}9928 = 0{,}0072$

Kiegészítés:
Ha ragaszkodunk a hagyományos standardizáláshoz, akkor is hasonló eredményt kapunk.

$$P(Z \geq 10) = 1 - P(Z < 10) = 1 - P\left(Z_{\text{std}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{100}{6}}}\right) = 1 - P\left(Z_{\text{std}} < \sqrt{6}\right) \approx 1 - 0{,}9928 = 0{,}0072$$

A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével kapott becslés $\frac{1}{12} \approx 0{,}0833$ volt, amelyik kb. egy nagyságrenddel rosszabb, mint amit a centrális határelszolás-tétel segítségével kaptunk.