**Tanmenet-részlet**

**Adatok:**

**Készítették:** Fekete Fruzsina, Töltl Márton, Várday Bence

**Tantárgy:** Matematika

**Évfolyam:** 9. évfolyam

**Szint:** közép

**Témakör:** Kombinatorika és gráfok

**Előismeretek:**  Szöveges feladatok értelmezése, geometriai alapismeretek, logikai alapfogalmak, halmazok ismerete

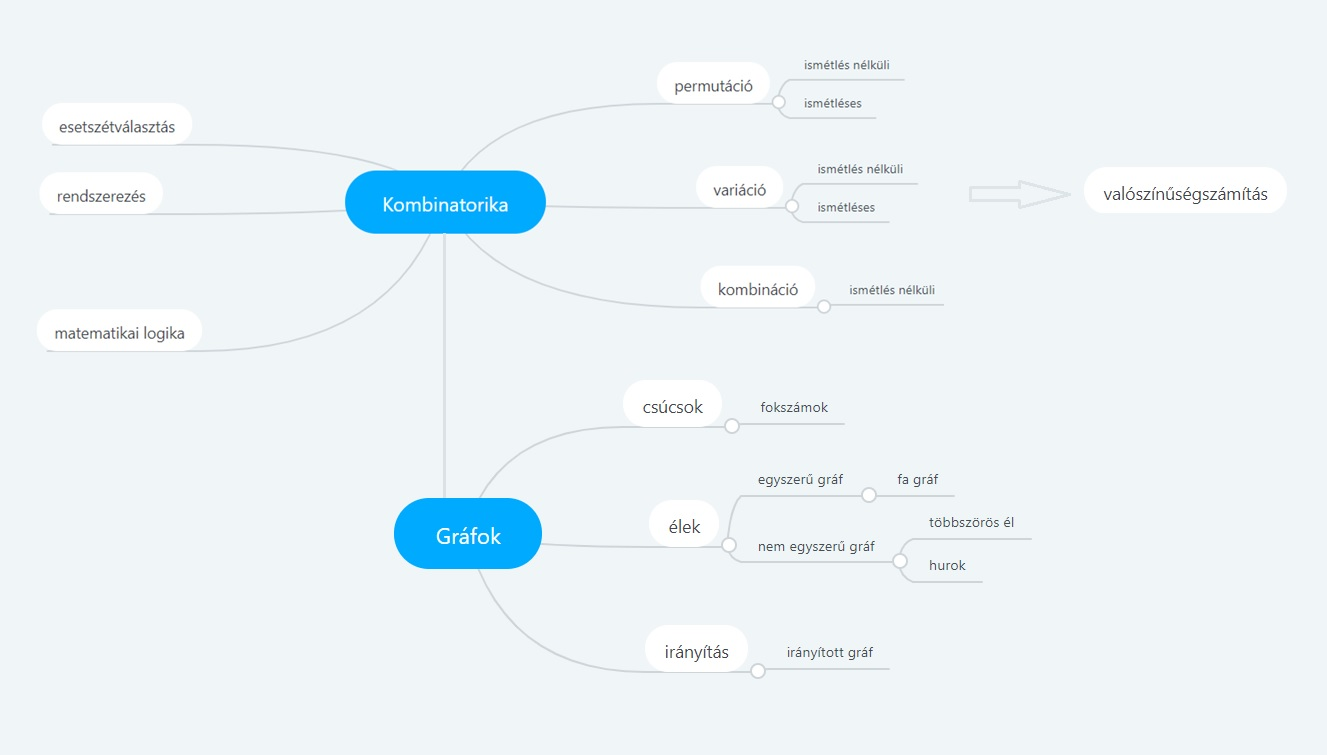
**Fejlesztési célok:** Gondolkodás; ismeretek rendszerezési képességének fejlesztése. Önfejlesztés, önellenőrzés segítése, absztrakciós képesség, kombinációs készség fejlesztése.

**Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára – Részlet:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Egyszerű kombinatorikai feladatok: leszámlálás, sorbarendezés, gyakorlati problémák.  Kombinatorika a mindennapokban. | Rendszerezés: az esetek összeszámlálásánál minden esetet meg kell találni, de minden esetet csak egyszer lehet számításba venni. Megosztott figyelem; két, illetve több szempont egyidejű követése. Esetfelsorolások, diszkusszió (pl. van-e ismétlődés).  Sikertelen megoldási kísérlet után újjal való próbálkozás; a sikertelenség okának feltárása (pl. minden feltételre figyelt-e). | *Informatika:* problémamegoldás táblázatkezelővel.  *Technika, életvitel és gyakorlat:* hétköznapi problémák megoldása a kombinatorika eszközeivel.  *Magyar nyelv és irodalom:* periodicitás, ismétlődés és kombinatorika, mint szervezőelv poetizált szövegekben. |
| A gráffal kapcsolatos alapfogalmak (csúcs, él, fokszám).  Egyszerű hálózat szemléltetése. | Gráfok alkalmazása problémamegoldásban.  Számítógépek egy munkahelyen, elektromos hálózat a lakásban, település úthálózata stb. szemléltetése gráffal.  Gondolatmenet megjelenítése gráffal. | *Kémia:* molekulák térszerkezete.  *Informatika:* problémamegoldás informatikai eszközökkel és módszerekkel, hálózatok.  *Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:* pl. családfa.  *Technika, életvitel és gyakorlat:* közlekedés. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Óra*** | ***Téma*** | ***Célok, fejlesztési területek*** | ***Ismeretanyag*** | ***Kapcsolódási pontok*** | ***Matematikatörténet*** |
| 1 | Sorbarendezés | absztrakciós képességek: fagráf készítése, szöveges feladatok értelmezése, modellalkotás, logikai készségek fejlesztése, feltételekkel kiegészített feladatok megértése | ismétlés nélküli permutáció, ismétlés nélküli variáció sorbarendezés feltételekkel, faktoriális bevezetése |  |  |
| 2 | Számzárak | leszámlálási feladatok gyakorlása, szövegértés, többféle gondolatmenet végigkövetése | ismétléses variáció |  | kínai hexagram |
| 3 | Anagrammák | logikai készségek fejlesztése, annak megértése, hogy egyforma elemeket nem különböztetünk meg, többféle gondolatmenet végigkövetése | egyszerű ismétléses permutációk, anagrammák | irodalom és nyelvtan: anagrammák |  |
| 4 | Kiválasztási feladatok | Szöveges feladatok értelmezése, többféle gondolatmenet végigkövetése, | Ismétlés nélküli kombináció, kézfogásos feladat, lottós feladatok, bevezetése | technika és életvitel: szerencsjátékok | Pascal-háromszög, Erdős Pál |
| 5 | Összetettebb kombinatorikai feladatok | Bonyolultabb, összetettebb feladatok megoldása közösen, eddig tanultak elmélyítése | Eddig tanultak szintetizálása, alkalmazás |  |  |
| 6 | Gyakorló óra, óra végén röpdolgozat | összefoglaló feladatok megoldása, ismeretek rendszerezése, számolási készség fejlesztése | Eddig tanultak, ezeknek számonkérése |  |  |
| 7 | Valószínűségszámítás (Kiegészítő óra) | szöveges feladatok értelmezése, kombinatorika alkalmazása, klasszikus valószínűségű mezőben a kimenetelek egyenlő valószinuséguek | Klasszikus/kombinatorikus valószínűségi mező, kedvező/összes tipusú feladatok megoldása | genetika, játékelmélet | Pascal-Fermat szerencsejátékok |
| 8 | Gráfok bevezetése | szövegek modellezése gráfokkal, definíciók értelmezése | gráfokhoz kapcsolódó fogalmak áttekintése, bevezetése | kémia: molekulás szerkezete  informatika: számítógépes hálózatok felépítése |  |
| 9 | Fokszámok, irányított gráf | gráfok tulajdonságai közötti összefüggések feltárása | Fokszámok megismerése, ezzel kapcsolatos állítások, irányított gráf bemutatása | földrajz: térképek, úthálózat  biológia: tápláléklánc  logisztika | Königsbergi hidak |
| 10 | Gyakorlás, összefoglalás | Eddig tanultak átismétlése, felmerülő kérdések megválaszolása, gyakorlás | dolgozatra való felkészülés, gyakorlás |  |  |
| 11 | Témazáró |  |  |  |  |

**Fogalmi háló**

****

**Óravázlat**

**Az óra témája:** Gráfok fokszámai, irányított gráf

**Előzmények:** gráfelmélet alapfogalmai: csúcsok, élek, egyszerű gráf, többszörös él, hurok, egyszerűbb feladatok gráfokkal, fagráf, kör

**Folytatás:** összefoglalás, dolgozatra való felkészülés

**Az óra céljai:**

* új fogalom szemléltetése
* fogalmak értelmezése
* új fogalmak alkalmazása

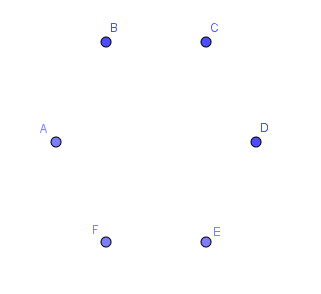
**Fejlesztendő készségek, képességek:**

* logikus gondolkodás;
* absztrakciós készség, matematikai modellezés
* önálló tanulás fejlesztése
* lényeglátás, szövegértés

**Felhasznált irodalom:**

* Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9. (2018), Eszterházy Károly Egyetem (OFI)
* [Kosztolányi József](https://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPszerzo.php?ltr=K#35008), [Kovács István](https://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPszerzo.php?ltr=K#05425), [Pintér Klára](https://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPszerzo.php?ltr=P#35020), [Urbán János Dr.](https://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPszerzo.php?ltr=U#35061), Vincze István: Sokszínű Matematika 9. (2018), MOZAIK-kiadó

**Eszközök:** tábla, kréta, projektor, kalotta-modell



**Előző órai házi feladat:** A járásban 6 település található, amik az alábbi módon helyezkednek el:

C-ből vezet út D-hez E-hez és F-hez, de E és F között közvetlenül is közlekedhetünk a köztük lévő úton. A-ba úgy juthatunk el, ha először elmegyünk F-be, majd onnan B-be és csak ezután érjük el a célunkat. Rajzoljátok le a járás úthálózat-térképét!

**ÓRAVÁZLAT**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Idő** | **Az óra menete** | **Tanári kommentár /megjegyzés** | **Munkamódszer** | **Munkaforma** | **Eszközök** |
| 0-2 | adminisztráció, jelentés |  |  |  |  |
| 2-10 | **Feladat:**  Vegyük elő az előző órai házi feladatot!    A városoknak kötelességük a hozzájuk tartozó utakat karbantartani. Mindegyik út karbantartása 2-2 millió forint évente, de ezt az összeget a két város, amit az adott út összeköt, egymás közt felezik, hiszen az út mindkettőhöz tartozik. Mennyit kell az egyes városoknak évente az utakra költeniük? | Adunk egy kis időt, hogy önállóan átgondolják, majd megoldjuk közösen úgy, hogy kihangsúlyozzuk azt a lépést, amikor odaírjuk a csúcsokhoz az utak számát. | munkáltatás, megbeszélés | egyéni munka, tanári magyarázat, tanár/tanuló a táblánál | tábla, kréta |
| 10-16 | Elevenítsük fel a vegyértékelektronokról tanultakat! Hogyan rajzolnád le ezt gráfként? Minek mennyi vegyértékelektronja van? | Elején eloszlatnánk a tanulókban azt, hogy ne féljenek, hogy csúnya kémiai molekulákkal kell foglalkozni a feladat során, hanem próbáljanak a gráfokban gondolkodni. Ne zavarja meg őket, ezek a képletek. Ezek után, talán segítség nélkül is boldogulnak, talán az ecetsavnál ütközhetnek problémákba. | szemléltetés, megbeszélés | tanári magyarázat | kalotta model, periódusos rendszer, projektor a kép kivetítéséhez/felrajzolás |
| 16-18 | Vegyük észre, hogy van egy ilyen tulajdonsága a csúcsoknál, ráadásul ez hasznos is. Ezután definiáljuk a fokszámot. | Ki, mi alapján rajzolgatott?  Melyik csúcsba, mennyi él fut be! Nahát, ezt fokszámnak nevezzük.  Felírjuk a táblára a fokszám definícióját, vagyis:  Def: A gráf egy pontjába összefutó élek számát a pont fokszámának nevezzük. | tanári előadás, új fogalom bevezetése | frontális osztálymunka |  |
| 18-22 | Gyakoroljuk kicsit a fokszám definícióját.  **Feladat:**  Rajzoljatok két tetszőleges (maximum 8 csúcsú) gráfot! Adjátok oda a padtársatoknak! Írjátok rá a kapott gráfokra a fokszámokat! | A feladat során megnézzük, hogy megértették-e a definíciót. Nyugodtan rajzolhatnak egymásnak, hisz mindenki a csúcsba befutó éleket fogja számolni. | munkáltatás, gyakorlás | páros munka | papír, toll |
| 22-29 | **Feladat:**  Rajzoljatok olyan gráfot, aminek ezek a fokszámai:  5, 4, 2, 2, 2, 1  3, 3, 2, 2, 1, 1  4, 3, 3, 3, 2, 2 | Első 2-őt meg lehet rajzolni, a 3.-at nem. | munkáltatás | önálló munka | papír, toll |
| 29-32 | Gondolkodjunk, hogy az utolsó miért nem lehetnek egy gráf fokszámai! Nézzük meg a fokszámok összegeit! | Rájuk hagyjuk, hogy rájöjjenek, miért nem lehet. Fel is írnánk a táblára! | kérdésfelvetés | közös munka az osztállyal, tanári magyarázat |  |
| 32-37 | Mit vettünk észre?  **Állítás:** A fokszámok összege mindig páros.  **Bizonyítás:** A fokszám az élek számának a duplája, mert egy élnek két “vége” van ami befut 1-1 csúcsba. | Közösen beszéljük meg az észrevételeket.  Ha valakinek van ötlete arra, hogy miért van ez így, akkor megkérjük, hogy mondja el ő a bizonyítását. | megbeszélés | tanári magyarázat, közös megbeszélés | tábla, kréta |
| 37-42 | Irányított gráf. Hogyan értelmezhetjük ezt a képet gráfként? | Milyen lényegi eltérést és hasonlóságot látunk az eddig látott gráfokhoz képest? Mit jelenthetnek a nyilak (irányok)? | megbeszélés  új fogalom bevezetése | tanári magyarázat, közös megbeszélés | projektor a kép kivetítéséhez |
| 42-45 | A königsbergi hidak problémájának ismertetése. Szorgalmi házi feladatként. | Ha sok időnk maradt, akkor az órán is megoldhatjuk. | házi feladat feladása | házi feladat feladása | tábla, kréta |

**Témazáró dolgozat**

1. **Feladat:**

A városi úszóverseny döntőjében 8-an indultak. (NINCSEN holtverseny) 1-1p

* 1. Hányféle végeredmény lehetséges?
  2. Hányféle kiosztása lehet az arany-, ezüst- és bronzéremnek?
  3. Hányféle sorrend lehetséges, ha tudjuk, hogy Marci lett a második és Bence a hatodik?

1. **Feladat:**

4 házaspár elmegy moziba. Mindannyian egy sorban ülnek.

* 1. Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha mindenki szeretne a párja mellé ülni. 4p
  2. Hányféleképpen ülhetnek le, hogyha Anna és Bianka nem akarnak egymás mellé ülni? 4p

1. **Feladat:**

Hány 4-gyel osztható, ötjegyű számot lehet alkotni a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával? (egy számjegyet TÖBBSZÖR is fel lehet használni) 4p

1. **Feladat:**

Gitta készül az irodalom témazárójára, ami 20 oldal (10 lap) hosszú a tankönyvben. Motiválásképpen minden lap után betett egy csokoládét, amit akkor eszik meg, hogyha megtanulta az előtte lévő lapon szereplő anyagot. 3 Bounty-ja, 2 Twix-e és 5 Snickers-e van. Hányféleképpen teheti sorba a csokikat a könyvbe? 3p

1. **Feladat:**

Megrajzolható-e az az egyszerű gráf, amelynek fokszámai:

1. 5, 5, 3, 2, 2, 2
2. 5, 4, 3, 3, 3, 2
3. 5, 5, 4, 4, 3, 1?

Ha lehetséges, rajzold is le, ha nem lehetséges indokolj! 1-1p

1. **Feladat:**

Egy hat fős társaság tagjai: András, Benedek, Csilla, Detti, Endre és Fruzsi. Mindegyikük pontosan három másik személyt ismer a társaságból. Csilla ismeri Dettit és Endrét, András pedig nem ismeri sem Benedeket, sem Dettit. Fruzsi és Detti ismerik-e egymást? Válaszod indokold! 3p

**Megoldások**

1. **Feladat:**
   1. 8!=40320 1pont
   2.  vagy  1pont
   3. 6!=720 1pont



1. **Feladat:**

a)

i. Felismeri, hogy a párokat egybe kell kezelni. 1pont

ii. Kiszámolja, hogy ez 4! 1pont

iii. Nem felejti el, hogy a pár két tagja egymás között helyet cserélhet (azaz beszoroz még valamivel) 1pont

iv. A helyes számmal szoroz be (-nel) 1pont

(végeredmény: 4!∙24=384)

b)

i. Kiszámolja az összes esetet 8! 1pont

ii. Kiszámolja a rossz eseteket () 2pont

iii. Kivonja a rossz eseteket. 1pont

(végeredmény: 8!7!∙2=30240)

**3. Feladat:**

i. Megtalálja az összes jó végződést. 1pont (ha csak 1-2 hiányzik 0,5 pont adható)

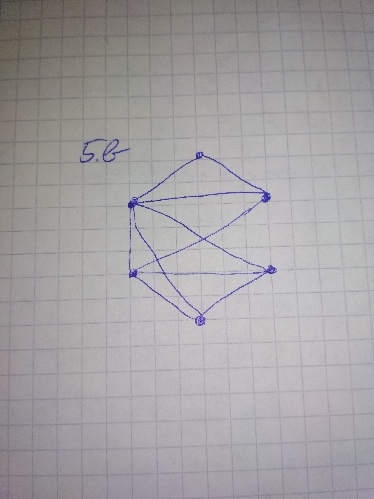
ii. Figyel arra, hogy nem állhat elöl 0. 1pont

iii. Felírja, hogy  1pont

iv. Ezt megszorozza a végződések számával. 1pont

(végeredmény: ∙9=1620)

**4. Feladat:**

 i. Felírja, hogy 10! 1pont

ii. Leoszt  –vel. 2pont

(végeredmény: 2520)

**5. Feladat:**

a) A fokszámok páratlanságával indokol. 1pont

b) Készít rajzot. 1pont

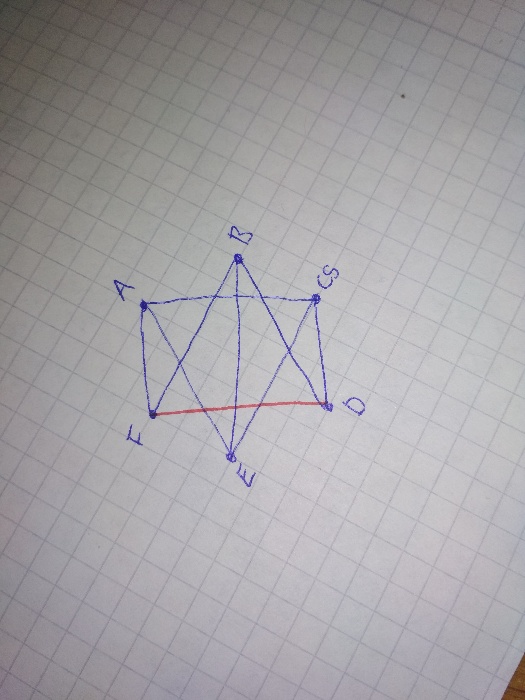
c) Rájön, hogy az 5, 5 miatt minden csúcsnak legalább kettő a fokszáma. 1pont

**6. Feladat:**

Ha felrajzolja helyesen a megadott gráfot. 1pont

Ha be tudja rajzolni a hiányzó éleket. 1pont

Ha le tudja olvasni helyesen a választ a gráfról. 1pont (akkor is jár, ha rosszul rajzolta le a gráfot, de helyesen olvasta le)

(válasz: ismeri)

**ponthatárok:**

|  |  |
| --- | --- |
| **24-20** | **5** |
| **19-16** | **4** |
| **15-12** | **3** |
| **11-8** | **2** |
| **7-0** | **1** |