**Tanmenet-részlet**

Készítették: Horváth András, Tóth Virág

Tantárgy: Matematika

Évfolyam: 12. osztály

Szint: Emelt szint (A)

Témakör: Sorok, sorozatok

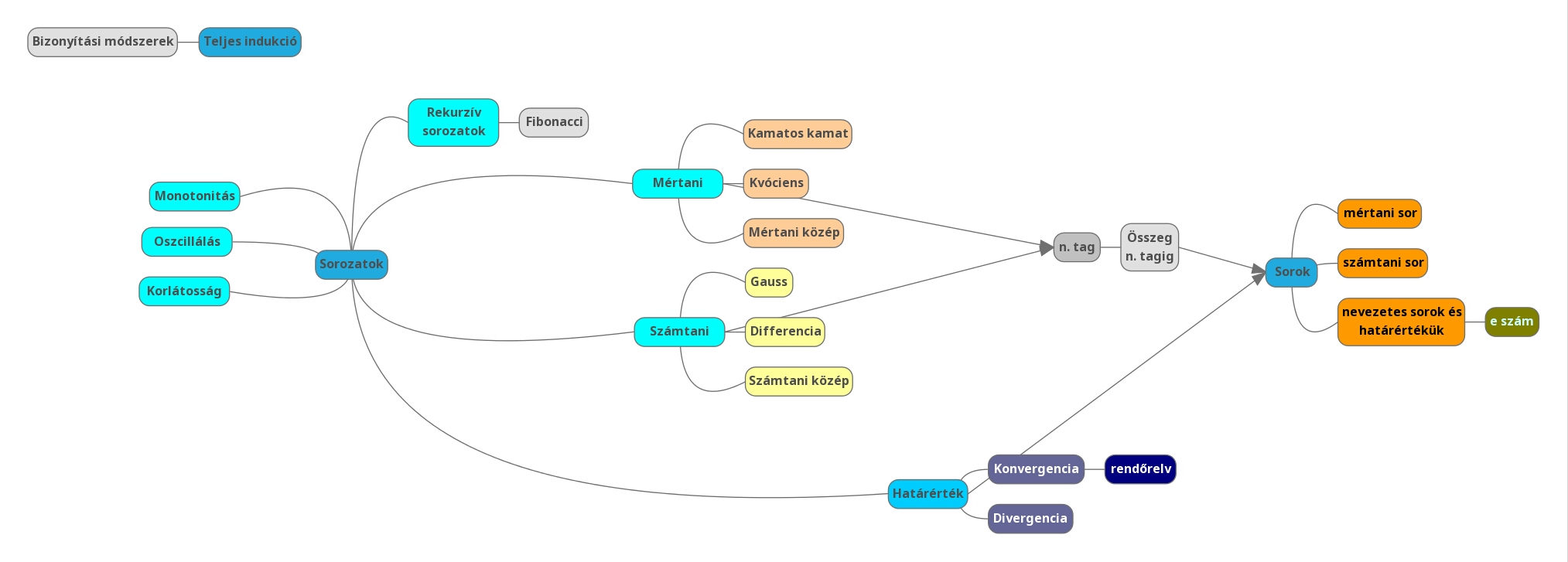
Előismeretek: Számtani és mértani sorozatok ismerete közép szinten

Megelőző anyagrész: Térgeometria

Következő anyagrész: Folytonosság, differenciálszámítás

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Óra*** | ***Téma*** | ***Célok, feladatok*** | ***Fejlesztési terület*** | ***Ismeretanyag*** | ***Matematikatörténet*** | ***Szemléltetőeszköz*** |
| 1 | Ismétlés: számtani és mértani sorozatok. | Sorozat típusának felismerése és a megfelelő képlet használata. A pontos definíció megértése, klasszikus példák megismerése. | A sorozatok, mint függvények. Definíciók alkalmazása. | Függvények, sorozatok, számsorozatok jellemzői, n-edik tag kiszámolása, összeg kiszámolása az n-edik tagig. A lineáris és az exponenciális növekedés összehasonlítása. | **Rhind-papirusz:** már az ókori egyiptomiak is ismerték a számtani és mértani sorozatokat. | Sakktábla, búzaszemek - sakk feltalálójának jutalma |
| 2 | Gyakorló feladatok: számtani és mértani sorozatok. További sorozatok (négyzetszámok összege, köbszámok összege). | Számtani és mértani sorozatok felismerése, lineáris és exponenciális függvény tulajdonságainak összehasonlítása. | Összegképletek előállítása és biztonságos használata. Problémamegoldási stratégiák. | Számtani és mértani sorozatok n-edik tagja, ill. összege. A teljes indukcióval történő bizonyítás. | **Gauss:** (kisgyermek) összegzési képlet az első 100 pozitív egészre. | Összeget szemléltető makettek. |
| 3 | Mértani sorozat gyakorlati alkalmazásai: törlesztési feladatok. | Gazdasági kitekintés, alapvető pénzügyi számítások elvégzése. | A függvényfogalom fejlesztése. A való életben előforduló problémák matematikai modellezése. A banki matematika alapvető elemei. | Százalékszámítás, mértani sorozat n-edik tagja, szövegértés. Pénzügyi alapismeretek gyarapítása.  *Hitelezés, kölcsön, kamatszámítás, THM, részvény, takarékbetét, gyűjtőjáradék (1-2 db 5 perces kiselőadás- vagy beadandó-lehetőség a diákoknak).* | A kamatszedést **Arisztotelész** etikátlan cselekménynek tartotta.  Érdekes kérdés: mire fel kell kamatot fizetnünk? Pénzbe kerül a pénz? |
| 4 | Rekurzív sorozatok, Fibonacci-sorozat. | Sorozat megadása rekurzióval és képlettel. | Algoritmizálás, fogalomalkotás. | Rekurzió (és a zárt alak) fogalma. A teljes indukcióval történő bizonyítás.  *A Fibonacci-számok és az aranymetszés a természetben és a művészetben (1-2 db 5 perces kiselőadás- vagy beadandó-lehetőség a diákoknak).* | **Fibonacci:** ~ -sorozat, nyulas történet **Binet:** ~ -formula, a Fibonacci-sorozat n-edik elemének zárt alakja. | Aranytéglalap. Szertári csontváz (opcionális, az emberi test arányainak szemléltetéséhez). Speciális összegeket szemléltető síkidomok. |
| 5 | Sorozatok konvergenciája, a határérték fogalma. | Határérték “elképzelése” és definiálása. | A sorozat - mint függvény - ábrázolása. Elvonatkozatás, fogalomalkotás, definíció alkalmazása. | A határérték fogalma és ekvivalens definíciói. A végtelen a matematikában. | **Euklidész, Arisztotelész:** gondolatok a „végtelen nagy” és a „végtelen kicsi” jelentéséről.  **Cauchy:** először ő „epszilondeltázott”. | Egy tábla csoki:  Elkezdünk megenni egy csokit. Mindig csak a maradék felét... Marad belőle? |
| 6 | Gyakorló feladatok: sorozatok konvergenciája, szemléletes feladatokkal. | Konvergencia fogalmának elmélyítése. | Alkalmazás, problémamegoldás, számolás. | Sorozatok határértékének meghatározása a definíció alapján (határérték megsejtése, majd bizonyítás megfelelő küszöbszám keresésével).  *Péter Rózsa: Játék a végtelennel (1 db 5 perces kiselőadás- vagy beadandó-lehetőség a diákoknak).* | **Leibniz:** ~ -típusú sorozatok. |  |
| 7 | Konvergens sorozatok tulajdonságai. | Tételek bizonyításának megértése, közös gondolkodás. A matematikai logika bizonyos elemeinek gyakorlása (pl. implikáció, és annak egyirányúsága). Példa és ellenpélda. | Rendszerezés, matematikai gondolkodás fejlesztése. | Határérték egyértelműsége, a határéték kapcsolata a korlátossággal és a monotonitással. |  | Miért konvergens a mozgólépcső?  Mert monoton és korlátos! |
| 8 | Gyakorló feladatok: konvergens sorozatok tulajdonságai. | Feladatmegoldás, a múlt órán tanult új fogalmak elmélyítése. | Alkalmazás, problémamegoldás, számolás. | Az előző órán tanult tételek alkalmazása konkrét példákon. |  |  |
| 9 | Műveletek konvergens sorozatokkal, rendőrelv. | Tanult tételek alkalmazása. | Algebrai átalakítások, problémamegoldás, modellalkotás, matematikai gondolkodás fejlesztése. | Többszörös, összeg, szorzat, hányados határértéke. Rendőrelv. |  |  |
| 10 | Gyakorló feladatok: műveletek konvergens sorozatokkal, rendőrelv. | Feladatmegoldás, a múlt órán tanult új fogalmak elmélyítése. Példa és ellenpélda. | Alkalmazás, problémamegoldás, számolás. | Az előző órán tanult tételek alkalmazása konkrét példákon. |  |  |
| 11 | Speciális sorozatok. Az e szám. | Speciális sorozatok határértékének megadása. Az e szám definiálása. | Bizonyítási módszerek, rendőrelv gyakorlása. | Speciális sorozatok limeszei:   , , .  Az Euler-féle szám definíciója, fontossága. | **Euler:** ~ -féle szám | Példák fizikai és biológiai folyamatokban az e szám megjelenésére |
| **12** | **Végtelen sorok: definíció, konvergencia, összeg.** | A végtelen sorok és sorozatok összehasonlítása. Illusztráció konkrét példákon. Példa és ellenpélda. | Elvonatkozatás, fogalomalkotás, definíció alkalmazása. | A végtelen sor definíciója, konvergenciája. A részletösszeg, mint sorozat. Konkrét példák.  *Zénón paradoxonjai (1 db 5 perces kiselőadás-vagy beadandó-lehetőség a diákoknak).* | **Zénón:** ~ paradoxonjai. | Összeget szemléltető makettek.  Fraktálok,  Sierpinski-szőnyeg,  Menger-szivacs. |
| 13 | Gyakorló feladatok: végtelen sorok, végtelen mértani sor. | Feladatmegoldás, a múlt órán tanult új fogalmak elmélyítése. | Alkalmazás, problémamegoldás, számolás. | Az előző órán tanult definíciók alkalmazása konkrét példákon. | **Napier:** a tizedestört bevezetése, számolópálcák (a logarléc ősei). |
| 14 | További példák konvergens sorokra: teleszkopikus összeg négyzetszámok reciprokösszege (\*). | A heurisztika jelenségének bemutatása. A teljes indukció és alternatívái. | Elvonatkoztatás, problémamegoldás, kreativitás. | Az előző órán tanult definíciók és tételek alkalmazása konkrét példákon. | **Fourier:** ~ -sorfejtés kitalálása (történet) és (\*) összeg megadása (NEM konkrét bizonyítás!). |
| 15 | Összefoglalás és gyakorlás: vegyes feladatok. | Ismétlés, gyakorló feladatok megoldása, felkészülés a témazáró dolgozatra. | Alkalmazás, problémamegoldás, rendszerezés, számolás. | A fejezetben tanult definíciók és tételek alkalmazása konkrét példákon. Problémamegoldási stratégiák gyakorlati alkalmazása. |  | Összefoglaló lap készítése a tanult definíciókból és tételekből. |
| 17 | TÉMAZÁRÓ DOLGOZAT |  |  |  |  |  |

**Gondolattérkép sorozatok és sorok fogalmának felépítésével kapcsolatban**

****

**Az óra témája:** VÉGTELEN SOROK: DEFINÍCIÓ, KONVERGENCIA, ÖSSZEG

**Előzmények:** sorozatok: definíció, határéték, határérték tulajdonságai (az elmúlt 11 óra).

**Folytatás:** bizonyítások folytatása, majd gyakorlati alkalmazások (szélsőérték-feladatok, becslés).

**Fejlesztendő készségek, képességek:**

* logikus gondolkodás;
* a kifejező készség alakítása: világos, rövid, precíz fogalmazás;
* a példa és az ellenpélda szerepe.

**Az óra didaktikai feladatai:**

* előismeretek felidézése;
* új ismeretek nyújtása, elvonatkoztatás, fogalomalkotás;
* definíciók alkalmazása.

**Tantárgyi kapcsolatok:** BIOLÓGIA, ÉLETVITEL- ÉS GYAKORLAT, FIZIKA, FÖLDRAJZ, TÖRTÉNELEM.

**Felhasznált források**:

* Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön (2004): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Műszaki Kiadó, Bp.
* Fröhlich Lajos (2006): *Alapösszefüggések matematikából. Emelt szint.* Maxim Kiadó, Szeged.
* Gábos Adél – Halmos Mária (2005): *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten.* *Elméleti összefoglaló, szóbeli tételek.* Műszaki Kiadó, Bp.
* Középiskolai 11-12. osztályos matematikafüzeteink.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Időkeret [min] | Az óra menete | Nevelési-oktatási stratégia | | | Megjegyzések |
| Módszerek | Tanulói munkaformák | **Eszközök** |
| 1-2. | Adminisztráció. | - | - | - | - |
| 3-5. | Ismétlés: a számtani és a mértani sorozat definíciója, majd: sorozat definíciója. | Kérdezés.  Megbeszélés. | Merev frontális: felszólítás után kérdésekre válasz.  Laza frontális: a tanárral interakcióban szóbeli fogalomalkotás. | Tábla, kréta.  Tábla, kréta, füzet, toll. | - |
| 6-10. | 1.) Becsüljük meg, majd tippeljük meg az  végtelen összeg értékét! | Páros munka. | Páros munka: a diákok használhatnak számológépet, rajzolhatnak, etc. | Füzet, toll, számológép. | [SZEMLÉLTETÉS]  Ábra vagy kis modell – ld. 1. sz. melléklet. |
| 11-15. | Az 1. feladat megbeszélése, I. rész: heurisztika. | Megbeszélés. | Laza frontális: a tanárral interakcióban szóbeli fogalomalkotás. | Füzet, toll, számológép, tábla, projektor, szemléltető eszköz (kép formájában vagy fizikai valójában). |
| 16-25. | A részletösszeg definíciója.  A végtelen mértani sor definíciója. Az összegképlet levezetése.  A végtelen sor és konvergenciája (definíciók).  Ha nem konvergens, akkor milyen (oszcillál-e, vagy csak „simán” divergens). | Megbeszélés.  Kérdezés.  Magyarázat. | Laza frontális: a tanárral interakcióban szóbeli fogalomalkotás.  Merev frontális: felszólítás után kérdésekre válasz, feladatmegoldás közben a határérték fogalmának átismétlése. | Tábla, kréta, füzet, toll. | Gondolkodtató kérdés az összeg végességére vonatkozó feltétellel kapcsolatban.  (Ezt nem a tanár írja bele, hanem rávezeti a diákokat.) |
| 26-30. | Az 1. feladat megbeszélése, II. rész: a megsejtett végeredmény bebizonyítása. | Egyéni munka.  Közös ellenőrzés | A diákok alkalmazás a definíciót, illetve a végtelen mértani sor imént bebizonyított összegképletét. | Füzet, toll.  Ellenőrzéshez tábla és kréta is. | Egy tanuló kihívása a táblához, valaki, akinek sikerült a bizonyítás. |
| 31-40. | További gyakorló feladatok:  2.) Számítsuk ki a következő összegeket! | Egyéni vagy páros munka  és frontális munka váltakozva. | A diákok egyedül vagy párban megoldják a kitűzött feladatokat. Ami marad, az HF.  Kb. három percenként egy feladat megbeszélése. | Tábla, kréta, füzet, toll. | A feladatok egyre nehezednek.  [SZEMLÉLTETÉS]  Opcionális szorgalmi feladat: a 2./a,b feladatokhoz szemléltető rajzot készíteni. |
| 41-45. | 3.) A Zénón paradoxon elmesélése (Akhilleusz és a teknősbéka). | Történetmesélés. | A diákok gondolkozhatnak a paradoxon feloldásán a következő óráig (szorgalmi HF).  *Opcionális: a paradoxon feloldásából kiselőadás- vagy beadandó készíthető!* | Kivetítő:  2.sz. melléklet, számítógép, tábla. | [TÖRTÉNET]  **Zénón:** ~ további paradoxonjai. Arckép kivetítése, történelmi elhelyezés. Ábra Akhilleuszról és a teknősről – ld. 2. sz. melléklet. |

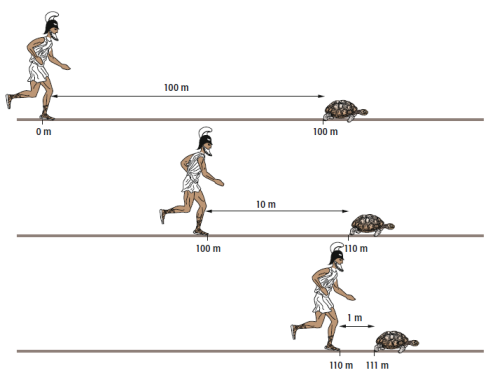
**1. sz. melléklet:** Az végtelen sor összegéhez tartozó szemléltető ábra. A színes síkidomok elkészíthetők akár papírból vagy fából is.

1

…

**2. sz. melléklet**: Zénón paradoxonhoz szemléltetésnek

**2. sz. melléklet:** Akhilleusz és a teknős: *„Képzeljük el Akhilleuszt, a leggyorsabb görögöt, amint versenyt fut egy teknőssel. Mivel olyan gyors, nagyvonalúan száz méter előnyt ad a hüllőnek. Alighogy elindul a verseny, Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahol a teknős kezdett. Ezalatt az idő alatt azonban a teknős is haladt egy keveset, talán egy métert. Akhilleusz egy újabb lépéssel ott terem, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan is ér Akhilleusz oda, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előrébb lesz. Zénón érvelése azt látszik igazolni, hogy Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak utolérni sem a teknőst.”*



***Témazáró dolgozat: sorozatok, sorok***

**1. feladat**

Egy számtani és egy mértani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja -1.

1. Mi a sorozatok első öt tagja?
2. Milyen pozitív egész n-ekre lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora?

**2. feladat**

Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első napján történhet, amely évben a gyermekük betölti 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napján ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.   
a) Mekkora összeg van ekkor a számlán?

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi, választhatja a következő lehetőséget is: Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank –az első pénzfelvételtől számítva– minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napján jóváír. b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként?

**3. feladat**

Legyen n pozitív egész. Vizsgált meg az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvegencia szempontjából!

**4. feladat**

Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy - egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7. A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük. Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? És ha nem?

**5. feladat**

Egy pénzintézet a tőle felvett forint összegű hitel visszafizetésekor havi -os kamattal számol , ezért az adós havi törlesztőrészletét a   
képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben , az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

1. Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
2. Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?
3. Számítsd ki a határértéket, ha és !

***Megoldások***

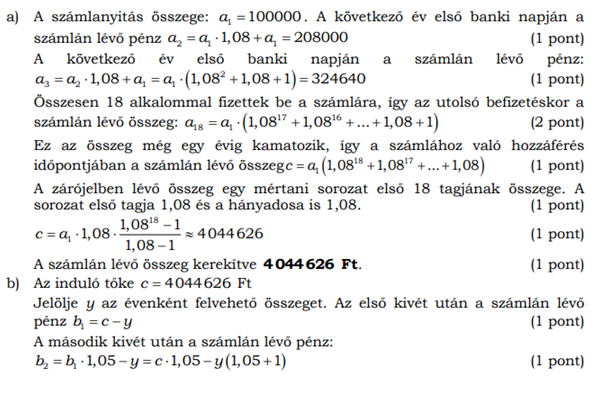
**1. feladat**

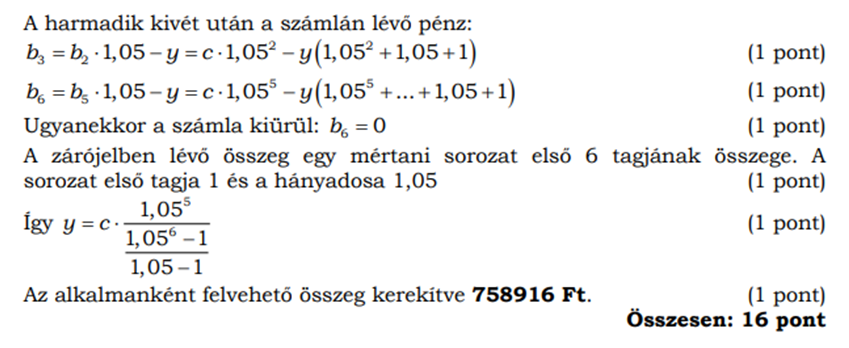
1. A sorozatok hatodik elemei: , illetve (1p), mindek alapján és (1p). Ennek alapján a számtani  
   sorozat első öt eleme: (1p), a mértani sorozat első öt eleme pedig: (1p).  
   ***Összesen: 4p.***
2. A számtani sorozat első tagjának összege: (1p), felbontva a zárójeleket: (1p).  
   A mértani sorozat első tagjának összege: (1p), aminek értéke paritásától függ: és (1p).  
   Egyenlőség lehetséges, ha: (1p) vagy vagy (1p).

***Összesen: 6p.***

***A teljes feladat összesen: 10p.***

**2. feladat**

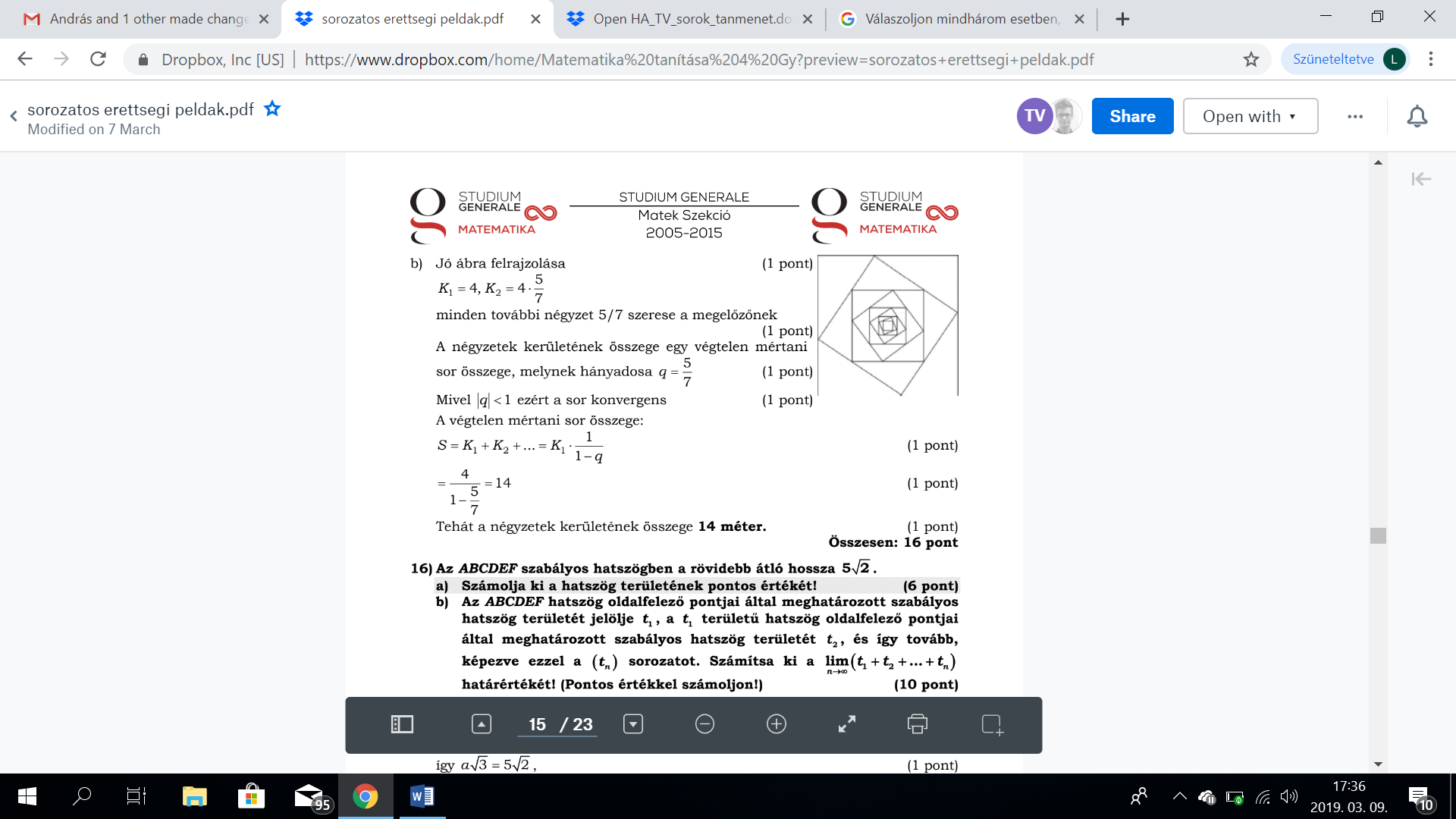




**3. feladat**

1. Ha (1p), ha pedig (1p).  
    oszcillálva divergens (1p), tehát se nem korlátos (1p), se nem monoton (1p). ***Összesen: 5p.***
2. Az abszolútértékek előjelváltozásai szerint: ha (1p), ha (1p), ha pedig (1p).  
    monoton csökken az előzőek alapján (1p), és korlátos; hiszen alulról és felülről is korlátos: a 13 és a -13 megfelelő felső és alsó korlátok (2p).  
   Mivel monoton és korlátos, ezért konvergens is (1p). ***Összesen: 7p.***
3. Figyelembe véve, hogy minden valós számra , az helyettesítés (1p) alapján, és szög kétszeresének szinuszára vonatkozó addíciós összefüggés (1p) alkalmazásával (1p). Mivel minden egész számra (1p), így konstans (1p). Ennek megfelelően monoton (1p) és korlátos (alsó és felső korlátja egyaránt az 1) (2p), így konvergens (1p). ***Összesen: 8p.***

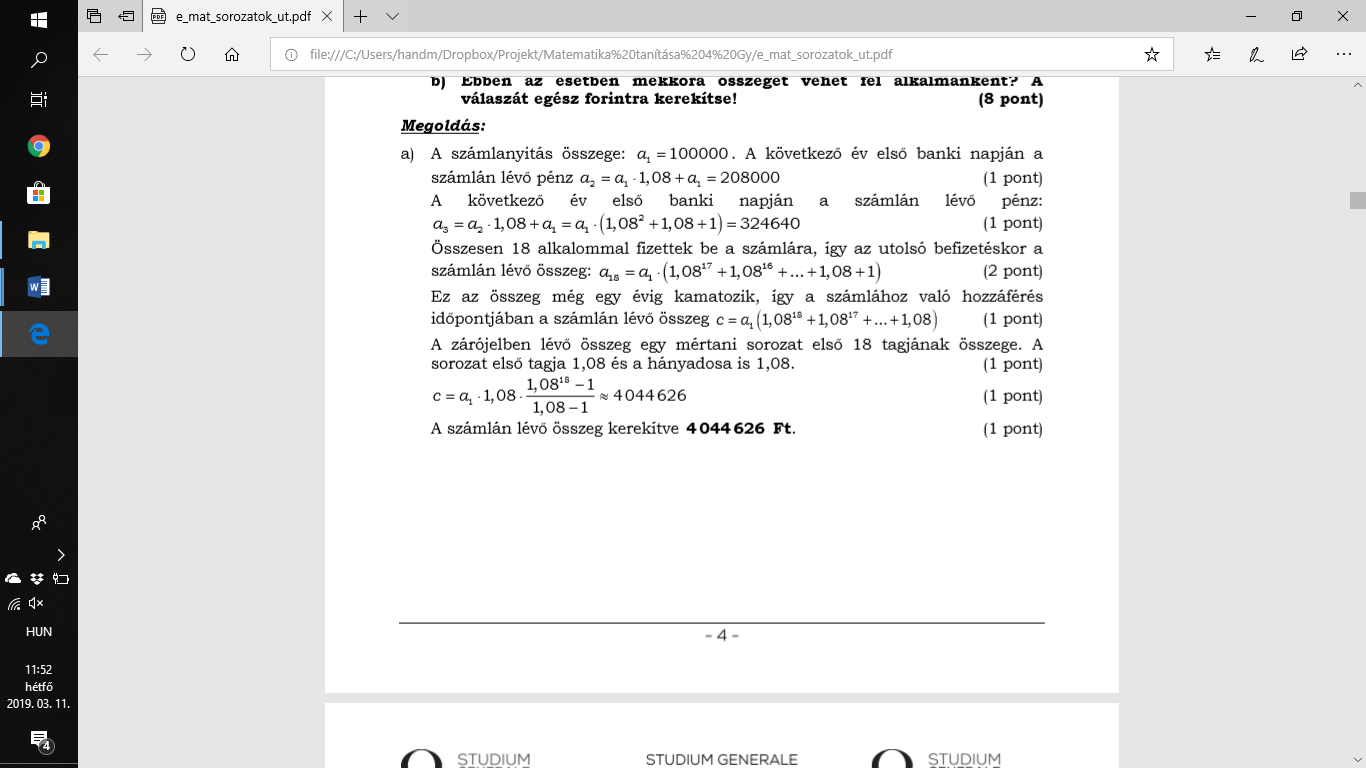
***A teljes feladat összesen: 20p.***

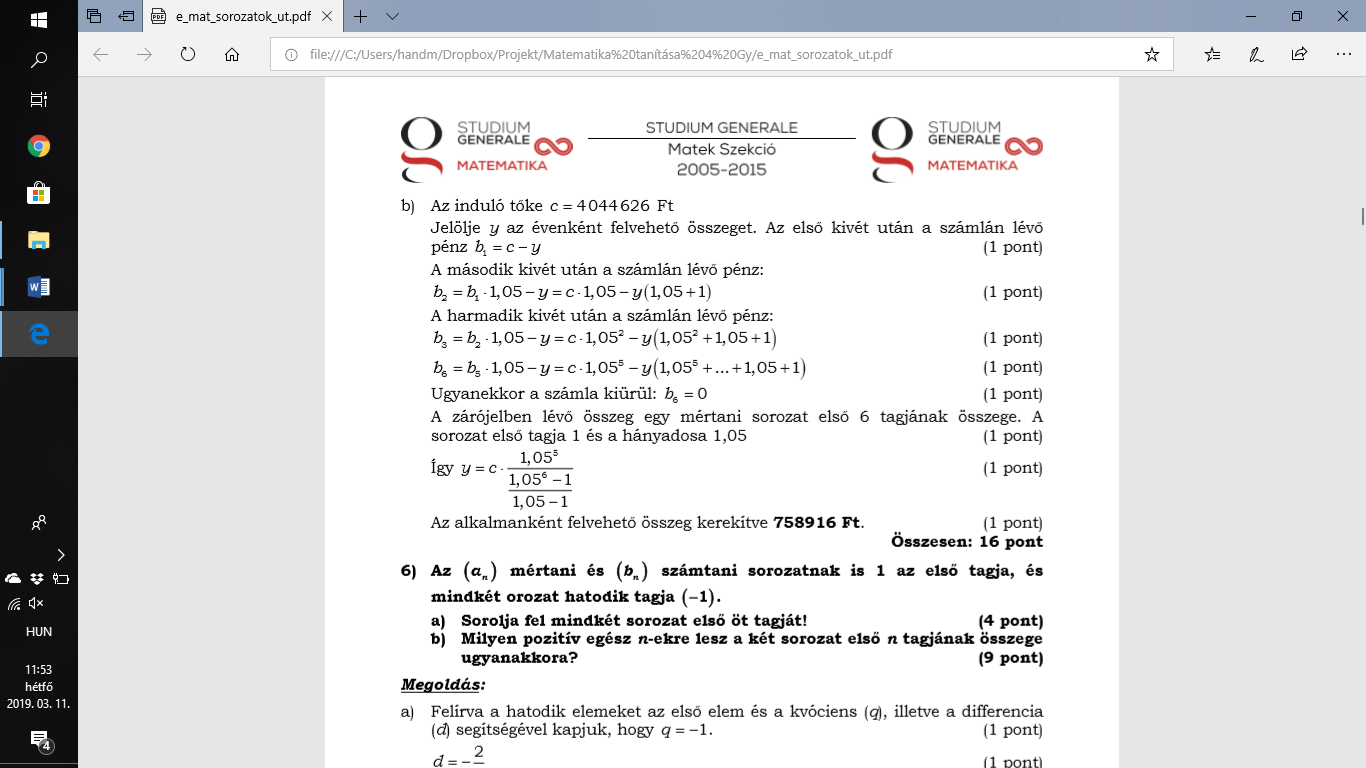
**4. feladat**

Jó ábra felrajzolása (2p). Az első néhány kerület: tehát minden további négyzet kerülete -része az előzőének (1p). A négyzetek kerületösszege egy vételen mértani sor összege (1p), melynek kvóciense: (1p). Mivel , ezért a sor konvergens (1p). Az összeg értéke: (3p) Válasz: Tehát a keresett kerületösszeg 14 méter, ha az első négyzet is tagja az összegnek, és 10 méter, ha nem (1p).

***A teljes feladat összesen: 10p.***

**5. feladat**





***A teljes dolgozat összesen: 72p.***

***Ponthatárok:***

***(5): – 61  
(4): 60 – 51  
(3): 50 – 41  
(2): 40 – 31  
(1): 30 –***