**Közép szint**

**2009 május, mat. magyar, mint idegen nyel II/A 14.**

*A PIROS iskola tanulóinak száma tízesekre kerekítve 650. A tanulók között pontosan 10-szer annyian vannak a 180 cm-nél alacsonyabbak, mint azok, akik legalább 180 cm magasak.*

1. *Pontosan hány tanulója van az iskolának?*

*A szomszédos KÉK iskolában a tanulók magasságának eloszlását az alábbi táblázat mutatja:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *180 cm-nél alacsonyabb* | *Pontosan 180 cm* | *180 cm-nél magasabb* |
| *560 tanuló* | *8 tanuló* | *48 tanuló* |

*A KÉK iskolában a legalább 180 cm magas tanulók 75%-a kosarazik, és ők alkotják a kosarasok 70%-át.*

1. *Hány kosaras jár a KÉK iskolába?*
2. *A KÉK iskolában az iskolanapon az egyik szponzor sorsolást tartott. Az összes sorsjegyet a tanulók között osztották ki, minden tanuló kapott egy sorsjegyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyetlen főnyereményt egy legfeljebb 180 cm magas tanuló nyeri meg?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Legfeljebb 180 cm magas 568 tanuló. | *1 pont* |  |
| a valószínűsége, hogy legfeljebb 180 cm magas tanuló nyerje a főnyereményt. | *2 pont* |  |
| ***Összesen:*** | ***3 pont*** |  |

**2009 május, mat. magyar, mint idegen nyel II/B 17.**

*Egy dobozban 100 darab azonos méretű golyó van: 10 fehér, 35 kék és 55 piros színű.*

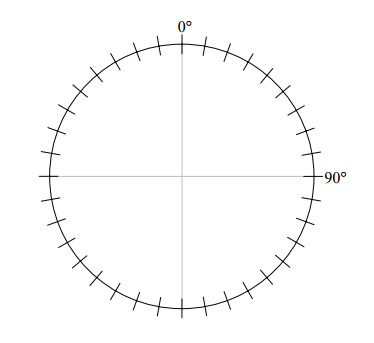
1. *Ábrázolja kördiagramon a 100 golyó színek szerinti eloszlását! Adja meg fokban és radiánban a körcikkek középponti szögének nagyságát!*

*Néhány diák két azonos színű golyó húzásának valószínűségét vizsgálja.*

1. *Szabolcs elsőre piros golyót húzott és félretette. Számítsa ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő kihúzott golyó is piros!*

*Egy másik kísérletben tíz darab 1-től 10-ig megszámozott fehér golyót tesznek a dobozba. Négy golyót húznak egymás után visszatevéssel.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy kihúzott golyóra írt szám szorzata 24?*



*Megoldás:*

**17 A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Helyes ábra | 2 pont |  |
| A középponti szögek:   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | Fehér | Kék | Piros | | Fokban | 36 | 126 | 198 | | Radiánban | 0,2π  (≈0,6283) | 0,7π  (≈2,1991) | 1,1π  (≈3,45581) |   A középponti szögek kiszámítása mértékegységenként 1-1 pont. | 2 pot |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kedvező esetek száma 54 | 1 pont |  |
|  | 2 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bármelyik számozott golyó kihúzásának ugyanakkora a valószínűsége, tehát alkalmazható a klasszikus modell. |  |  |
| Az összes esetek száma . | 1 pont |  |
| Az 1-10-ig felírt számokkal a 24-et a következő módokon állíthatjuk elő:   1. 1, 1, 3, 8 2. 1, 1, 4, 6 3. 1, 2, 2, 6 4. 1, 2, 3, 4   e) 2, 2, 2, 3 | 5 pont |  |
| A lehetséges sorrendek száma miatt: a), b), illetve c) 12-12 eset; | 1 pont | Akkor is jár az egy pont, ha valamelyik esetet nem vette észre |
| 1. 24 eset | 1 pont |  |
| 1. 4 eset | 1 pont |  |
| A kereset valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **10 pont** |  |

**2009 május, matematika II/A 13.**

*Egy 2000. január elsejei népesség-statisztika szerint a Magyarországon élők kor és nem szerinti megoszlása (ezer főre) kerekítve az alábbi volt:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Korcsoport*  *(év)* | *Férfiak száma*  *(ezer fő)* | *Nők száma*  *(ezer fő)* |
| *0-19* | *1 214* | *1 158* |
| *20-39* | *1 471* | *1 422* |
| *40-59* | *1 347* | *1 458* |
| *60-79* | *658* | *1 043* |
| *80-* | *75* | *170* |

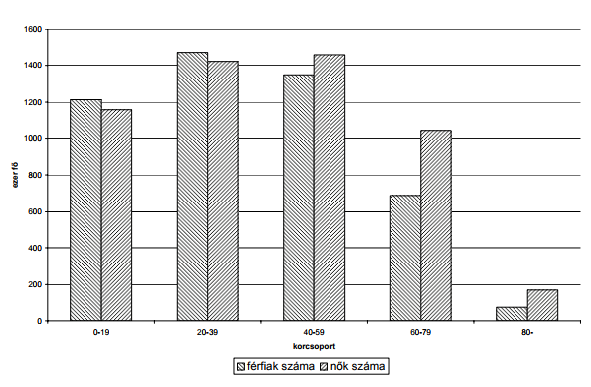
1. *Melyik korcsoport volt a legnépesebb? A táblázat adatai alapján adja meg, hogy hány férfi és hány nő élt Magyarországon 2000. január 1-jén?*
2. *Ábrázolja egy közös oszlopdiagramon, két különböző jelölésű oszloppal a férfiak és a nők korcsoportok szerinti megoszlását!*
3. *Számítsa ki a férfiak százalékos arányát a 20 évnél fiatalabbak korcsoportjában, valamint a legalább 80 évesek között!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A 20-39 éves korcsoport volt a legnépesebb (2 893 ezer fő). | 1 pont |  |
| 4 792 ezer (4 792 000) férfi | 1 pont |  |
| és 5 251 ezer (5 251 000) nő élt az országban. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**B**



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A tengelyek helyes felvétele (egyértelműen kiderülnek a szereplő mennyiségek és a lépték). | 1 pont |  |
| Helyes grafikon, jól látható arányokkal. | 4 pont | Adatsoronként (férfiak illetve nők) 2-2 pont. Helyes sávdiagram készítése is teljes értékű |
| **Összesen:** | 5 pont | Ha az összlakosságra készít oszlopdiagramot, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat. Két külön rajzolt helyes diagram 4 pontot ér. |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A 20 évnél fiatalabb férfiak száma 1214 ezer, a korcsoport lélekszáma 2372 ezer fő volt, | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár |
| Tehát a férfiak százalékos aránya | 1 pont |  |
| A legalább 80 éves férfiak száma 75 ezer, a korcsoport lélekszáma 245 ezer fő volt, | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár. |
| tehát a férfiak százalékos aránya: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 4 pont |  |

**2009 május, matematika II/A 14a.**

*Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz?*

*A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően 1: 2 : 3: 4 . Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16 000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.*

1. *Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról?*
2. *Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön - külön?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van, | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, ez az 1 pont akkor is jár. |
| az első versenyző  valószínűséggel húz 7-tel osztható számot. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**Emelt szint**

**2009 május, matematika I 2.**

*Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:*

*166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159.*

1. *Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm?*

*Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia.*

1. *Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:* 
   1. *Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.*
   2. *Az angolt is és német et is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.*
   3. *Angolul 27-en tanulnak.*
   4. *A németet is és franciát is tanulók száma 15.*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A lányok testmagasságának átlaga:  (cm) | 1 pont |  |
| Az osztály tanulóinak átlagmagasságát () a 16 lány átlagmagassága () és a 14 fiú átlagmagassága () segítségével számíthatjuk ki: | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, az 1 pont akkor is jár. |
|  | 1 pont |  |
| . | 1 pont |  |
| Az osztály tanulóinak átlagmagassága 168,0 cm. | 1 pont | Ha nem egy tizedesjegyre kerekít – például 168-at ír –, a pont nem jár. |
| **Összesen:** | 5 pont | Ha nem súlyozott átlagot számol, az utolsó 4 pontot elveszíti. |

**2009 május, matematika II 6.**

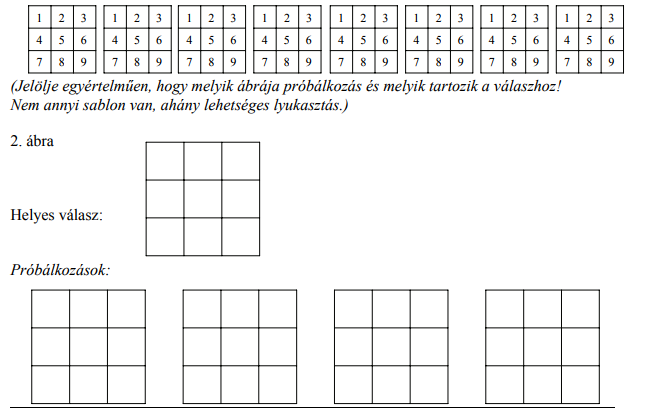
*Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kell érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1–9-ig szerepelnek a számok (lásd 1. ábra).*

*A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.*

1. *Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások!*
2. *Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk.) Rajzolja be a szimmetriatengelyt!*

*Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, ha a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.*

1. *Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága?*



*Megoldás:*

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az első kilenc pozitív egész között 4 prímszám van. | 1 pont |  |
| Kedvező esetek száma: 4. | 1 pont |  |
| Az összes lehetséges lyukasztások száma: | 2 ponts |  |
| Áron kívánsága valószínűséggel teljesül | 1 pont |  |
| Zita kívánságának 7 számhármas felel meg:  (1; 3; 9),  (1; 4; 8),  (1; 5; 7),  (2; 3; 8),  (2; 4; 7),  (2; 5; 6),  (3; 4; 6). | 3 pont | 1.) Ötnél kevesebb eset felsorolása esetén nem jár pont.  2.) 5 jó eset 1 pont; 6 jó eset 2 pont; 7 jó eset 3 pont, ha egy vagy több hibás számhármast is megad, akkor 1 ponttal kevesebb jár.  3.) A 3 pont megadható minden olyan megoldásrészletre, amellyel a vizsgázó helyesen indokolja a kedvező kiválasztások számát. |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | Ha csupán eredményként közli a kért valószínű- séget, csak az utolsó 1 pontot kapja meg. |
| **Összesen:** | 9 pont |  |

**2009 május, matematika II 7.**

András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, pároson 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

1. Hány métert úszott le András a 6. napon?
2. Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt?
3. Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen választunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20 000 métert teljesített?

*Megoldás:*

**C 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az edzések húsz napja közül két szomszédos nap 19- féleképpen választható ki. | 1 pont |  |
| Ha két szomszédos nap során összességében nem teljesül a tervezett 20 000 méter, később sem fog, mert a kétnaponkénti összteljesítmény csökken. | 1 pont |  |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | A napok sorszáma (n) | Naponta leúszott táv méterben () | Kétnapi össztáv  () | | 1. | 11000 | 20900 | | 2. | 9900 | 20790 | | 3. | 10890 | 20691 | | 4. | 9801 | 20582 | | 5. | 10781 | 20484 | | 6. | 9703 | 20376 | | 7. | 10673 | 20279 | | 8. | 9606 | 20172 | | 9. | 10566 | 20076 | | 10. | 9510 | 19971 | | 11. | 10461 |  | | 2 pont | Egy vagy két számítási hiba esetén 1 pont jár. Következetes kerekítési értékekkel elkészített táblázat teljes pontszámot ér. |
| A kedvező nappárok száma 9. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: . | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 6 pont |  |

**C 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A , , ,  (ahol ) összegeket kell vizsgálni. | 1 pont |  |
| () szigorúan csökkenő, | 1 pont |  |
| hiszen k paritásától függetlenül igaz, hogy  és  , így  (ahol  és .) | 1 pont |  |
| és | 1 pont |  |
| így pontosan 9 esetben lesz a kétnapi teljesítmény legalább 20 000 m. | 1 pont |  |
| Miután bármely két szomszédos napot azonos eséllyel választhatjuk, így a keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 6 pont |  |

**2009 május, matematika magyar mint idegen nyelv I 1.**

*Egy 26 fős osztályban felmérték, hogy hetente átlagosan ki hány órát tölt otthoni tanulással. A felmérés eredményét a következő táblázat tartalmazza:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A tanulással töltött órák száma* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *A diákok száma* | *6* | *3* | *1* | *2* | *0* | *5* | *5* | *4* |

1. *Számolja ki, hogy az osztályban egy diák hetente átlagosan hány órát tölt otthoni tanulással! Határozza meg az osztályban az otthoni tanulással töltött órák számának további középértékeit (móduszát, illetve mediánját) is!*
2. *Készítsen oszlopdiagramot a táblázat adataiból!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 2 pont |  |
|  | 1 pont | Mértékegység nélküli helyes válaszért 1-1 pont jár. Ha a mediánt és a móduszt nem a 26 adatra vonatkoztatva állapítja meg, a 2-2 pontot elveszti |
| Módusz: 3 óra | 2 pont |
| Medián: 8 óra. | 2 pont |
| **Összesen:** | 7 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 3 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**2009 május, matematika magyar mint idegen nyelv II 9.**

*Egy zeneiskolában három hangszeren: zongorán, gitáron és szaxofonon lehet tanulni. Tavaly 18 tanuló iratkozott be a zeneiskolába. Közülük mindenki egy vagy két hangszeren tanult játszani, három hangszeren egyikük sem. Tizenöten tanultak zongorázni, nyolcan gitározni és heten szaxofonozni.*

1. *Hányan tanultak pontosan két hangszeren játszani?*

*Ebben a zeneiskolában nem volt olyan diák, aki tanult volna gitározni is és szaxofonozni is. A csak egy hangszeren tanulók közül azok, akik szaxofonozni tanultak, kétszer annyian voltak, mint azok, akik gitározni tanultak.*

1. *Hányan voltak, akik zongorázni és gitározni is tanultak? Hányan voltak, akik zongorázni és szaxofonozni is tanultak?*
2. *A zeneiskola tanulói között két jegyet sorsoltak ki ugyanarra a hangversenyre úgy, hogy két diák nevét húzták ki véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy vagy mindkét kisorsolt diák szaxofonozni tanult, vagy mindketten gitározni tanultak?*

*Megoldás:*

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A hét szaxofonos közül kettőt  féleképpen választhatunk ki. | 1 pont |  |
| A 8 gitáros közül kettőt -féleképpen választhatunk ki. | 1 pont |  |
| Kedvező esetek száma: | 2 pont |  |
| A 18 tanuló közül kettőt  -féleképpen választhatunk ki. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | A helyes végeredmény bármelyik alakban elfogadható. |
| **Összesen:** | 6 pont |  |

**Közép szint**

**2009 október, matematika I 3.**

*Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni, hogy – véletlenszerűen kiválasztva egy golyót –, fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A fekete golyók száma: 12. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | 2 pont |  |

**2009 október, matematika I 9.**

*Melyik az a legnagyobb szám az alábbi 12 szám közül, amelynek elhagyásával a megmaradt 11 szám mediánja 6?*

*6; 4; 5; 5; 1; 10; 7; 6; 11; 2; 6; 5*

*Megoldás*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az elhagyott szám: 5. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | 2 pont |  |

**2009 október, matematika II 15.**

Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám

1. négyzetszám;
2. számjegyei megegyeznek;
3. számjegyeinek összege legfeljebb 9?

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A dobható négyzetszámok: 16, 25, 36, 64. | 1 pont |  |
| Összesen 36 különböző kétjegyű számot kaphat | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az egyes helyiértéken 6-féle, ettől függetlenül a tízes helyiértéken is 6-féle számot kaphat. | 1 pont |  |
| A számjegyek 6 esetben egyeznek meg, ez a kedvező esetek száma | 1 pont |  |
| A valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**C 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A számjegyek összege legfeljebb 9:  11, 12, 13, 14, 15, 16,  21, 22, 23, 24, 25, 26,  31, 32, 33, 34, 35, 36,  41, 42, 43, 44, 45,  51, 52, 53, 54,  61, 62, 63 számok esetében. | 4 pont | Ezt a 4 pontot megkaphatja bármilyen helyes indoklásért, a 30 szám felsorolása nem szüksé- ges. |
| A kedvező esetek száma: 30. | 1 pont |  |
| A valószínűség: 30/36 = 5/6. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 6 pont |  |

**C 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A komplementer esemény (az összeg nagyobb 9-nél) valószínűségét számítjuk ki. | 2 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldásban jelent meg, akkor is jár a 2 pont |
| A számjegyek összege nagyobb 9-nél: 46, 55, 56, 64, 65, 66. | 2 pont |  |
| A kedvező esetek száma: 6, a komplementer esemény valószínűsége: 6/36 = 1/6. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: 1-1/6 = 5/6. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 6 pont |  |

**Emelt szint**

**2009 október, matematika II 5.**

*A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól még a következőket tudjuk:*

* *csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;*
* *egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;*
* *Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül.*

1. *A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.*
2. *Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.*
3. *A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?*
4. *Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű?*

*Megoldás:*

**D**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A 8 ember összes ülésrendjének száma: 8!(= 40320) | 1 pont |  |
| Mivel bármelyik ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség: | 2 pont | Ha a c) rész rossz eredményével jól számol, akkor is jár a 2 pont. |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**2009 október, matematika II 7.**

*Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.*

1. *Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?*

*A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)*

*Megoldás:*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak. Mivel egymástól függetlenül döntöttek, | 1 pont |  |
| annak a valószínűsége, hogy mindenki elmegy | 1 pont |  |
| Innen | 2 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el: 1 − p. | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: | 2 pont |  |
| Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy elmegy | 2 pont |  |
| ami közelítőleg 0,998. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 11 pont |  |

**Közép szint**

**2010 május, matematika I 3**

*Az alábbi táblázat egy 7 fős csoport tagjainak cm-ben mért magasságait tartalmazza. Mekkora a csoport átlagmagassága? A csoport melyik tagjának a magassága van legközelebb az átlagmagassághoz?*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Anna* | *Bea* | *Marci* | *Karcsi* | *Ede* | *Fanni* | *Gábor* |
| *155* | *158* | *168* | *170* | *170* | *174* | *183* |

*Megoldás*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az átlag fogalmának helyes használata. | 1 pont |  |
| Az átlag: ≈168,3 cm. | 1 pont |  |
| Az átlagmagassághoz legközelebb Marci magassága van. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**2010 május, matematika I 8**

*Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám nem negatív?*

*–3,5; –5; 6; 8,4; 0; –2,5; 4; 12; –11.*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 2 pont | A 2 pont nem bontható |
| **Összesen:** | 2 pont |  |

**2010 május, matematika I 11**

*A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy két találatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes? Válaszát indokolja!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sárának összesen , azaz 10 féle tippje lehet (és ezek mindegyike ugyanakkora valószínűségű). | 1 pont |  |
| Ezek közül a {10; 53} pár a helyes. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont |  |

**2010 május, matematika I 12**

*Egy 17 fős csoport matematika témazáró dolgozatának értékelésekor a tanár a következő információkat közölte:*

*Mind a 17 dolgozatot az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es és az 5-ös jegyek valamelyikével osztályozta.*

*A jegyek mediánja 4, módusza 4, terjedelme 4 és az átlaga (két tizedes jegyre kerekítve) 3,41.*

*Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve hamis!*

1. *A dolgozatoknak több mint a fele jobb hármasnál.*
2. *Nincs hármasnál rosszabb dolgozat.*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A: igaz | 1 pont |  |
| B: hamis | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 2 pont |  |

**2010 május, matematika II 16**

*Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:*

1. *Diákok Hangja*
2. *Iskolaélet*
3. *Miénk a suli!*

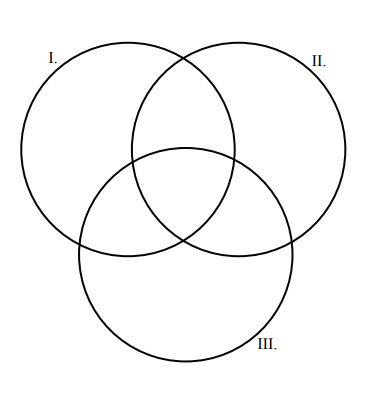
*Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.*

*A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.*

1. *Hányan olvasták mindhárom kiadványt?*
2. *A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát!*
3. *Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt?*

*Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet?*



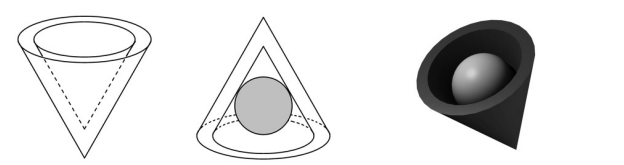
*Megoldás:*

**D**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 84 fő látogatta, 42 fő nem látogatta a rendezvényeket. | 1 pont |  |
| Közülük 28 fő, illetve 21 fő olvasta az Iskolaéletet | 1 pont |  |
| A két megkérdezett diák –féleképpen választható ki (összes eset). | 1 pont |  |
| A rendezvényt látogatók közül -féle olyan diák, a nem látogatók közül -féle olyan diák választható, aki olvasta az Iskolaéletet. | 1 pont | A kevésbé részletezett helyes gondolatmenet is 3 pont. |
| A kedvező esetek száma tehát | 1 pont |
| A keresett valószínűség: | 1 pont |
| ≈0,075(=7,5%). | 1 pont |  |
| **Összesen** | 7 pont |  |

**2010 május, matematika II 18**

*Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.) A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya . A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.*



1. *Hány*  *csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg!*

*Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.*

1. *Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg!*

*A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak.*

1. *A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak? (A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.)*

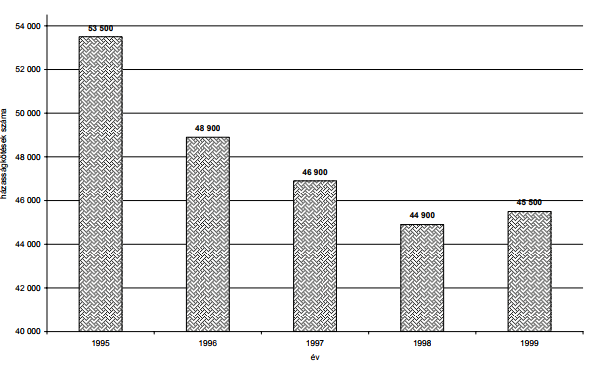
*Megoldás:*

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott gömb nem az előírt méretű 0,1. | 1 pont | Ha ezek a gondolatok a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok. |
| Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott az előírásnak megfelelő méretű 0,9. | 1 pont |
| A keresett valószínűséget az  képlettel számolhatjuk ki, | 1 pont |
| ahol n =10, k = 4, p = 0,1 | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | Fogadjuk el a választ különböző pontosságú helyes kerekítésekkel. |
| **Összesen:** | 5 pont | Jár az 5 pont, ha a konkrét esetet elemezve használ helyes modellt. |

**2010 május, magyar mint idegen nyelv matematika I 2**

*Az alábbi oszlopdiagramon százasokra kerekítve ábrázolták az adatokat. Hány házasságkötéssel volt kevesebb 1998-ban, mint 1995-ben?*



*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 600-zal | 2 pont | Hibás előjelért 1 pontot veszítsen! |
| **Összesen:** | 2 pont |  |

**2010 május, magyar mint idegen nyelv matematika I 11**

*Egy településen a polgármester választáson 12 608 választásra jogosult közül 6347-en adtak le érvényes szavazatot. A két jelölt egyike 4715 szavazatot, a másik 1632 szavazatot kapott. A választásra jogosultak közül véletlenszerűen kiválasztunk egy választópolgárt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy érvényesen szavazott, mégpedig a vesztes jelöltre?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A vesztes 1632 szavazatot kapott, ez a „kedvező” esetek száma. Az összes eset száma a választásra jogosultak száma.) A kérdezett valószínűség: | 3 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**2010 május, magyar mint idegen nyelv matematika II 16.**

*Egy erdő faállományát 1998. január elején 29 000*  *-nek becsülték.*

1. *Hány m3 lesz 11 év múlva az erdő faállománya, ha a gyarapodás minden évben az előző évi állomány 2 százaléka? Válaszát ezresekre kerekítve adja meg!*

*Az erdő faállománya négy csoportba sorolható: tölgy, bükk, fenyő és vegyes (az előzőekben felsorolt fafajtáktól különböző). 1998 elején a faállomány 44%-a tölgy és 16%-a fenyő volt. Tudjuk még, hogy ekkor a bükkfa állomány és a fenyőfa állomány aránya ugyanannyi volt, mint a fenyőfa és a vegyes fafajták állományának aránya. (Fenyőből több volt, mint a vegyes fafajtákból.)*

1. *Számítsa ki, hogy mekkora volt 1998 elején az egyes fafajták százalékos részesedése az állományban! A kapott adatokat ábrázolja kördiagramon, feltüntetve a kiszámított szögek nagyságát fokokban mérve!*



*Megoldás:*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| A tölgytől különböző fák 56%-ot tesznek ki (a bükk, a fenyő és az egyéb egy mértani sorozat szomszédos tagjaiként). | 1 pont | Bükkfa az állomány b%-a, vegyes az állomány e%-a, fenyőfa az állomány 16%-a. |
| A fenyő 16%, a bükk 16q %, a vegyes | 1 pont | B+e = 40 |
|  | 2 pont | A behelyettesítő módszerrel az    Egyenlethez jutunk. |
| Ebből q = 2 vagy q = 0,5 | 2 pont | Ennek megoldása: e = 32 , illetve e = 8. |
| Mivel a vegyes kevesebb, mint a fenyő, ezért csak q = 2 lehetséges. | 1 pont | Mivel fenyőből nagyobb az állomány, mint az vegyes fafajtákból, ezért e = 8 és b = 32 . |
| Azaz bükk 32%, vegyes 8% | 1 pont |  |
| Ekkor a kördiagramon a szögek rendre: tölgy: 158°, bükk: 115°, fenyő: 58°, vegyes: 29°. | 2 pont | Ha 1 hibás szöget tüntet fel, 1 pontot kap, két hibás szög: 0 pont. |
| Helyes kördiagram. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | 12 pont |  |

**2010 május, magyar mint idegen nyelv matematika II 18.**

*Minőségellenőrzéskor kiderült, hogy 100 készülék között 12 hibás van, a többi 88 jó. A 100 készülékből véletlenszerűen, egyesével kiválasztunk 6-ot úgy, hogy a kiválasztott készülékeket rendre visszatesszük.*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy nincs a kiválasztott készülékek között hibás? Válaszát tizedes tört alakban adja meg! A 100 készülék közül ismét véletlenszerűen, de ezúttal visszatevés nélkül választunk ki 6 darabot.*
2. *Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége: A kiválasztott készülékek között nincs hibás, vagy közöttük legalább két hibás készülék van?*

*Válaszát számítással indokolja!*

*Megoldás:*

**A 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Esetünkben a hat húzás mindegyikében 88-féleképpen lehet jót húzni, azaz a kedvező esetek száma | 2 pont | Ha a gondolatok csak a képletben jelennek meg, az 2 pontot ér. |
| Az összes lehetőség mindegyik húzásnál 100, tehát az összes lehetséges húzások száma | 2 pont |
| Ezzel a keresett valószínűség: | 1 pont | A két tizedes jegyre kerekített értéket is elfogadjuk. |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**A 2. megoldás**

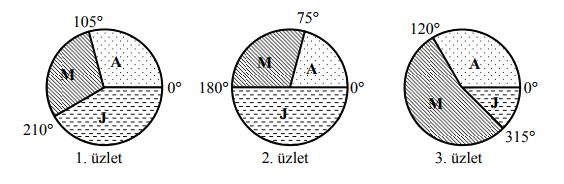
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A „jó készülék” húzásának esélye 0,88, | 1 pont | Ha a gondolatok csak a képletben jelennek meg, az 2 pontot ér |
| amely egymástól független eseményként | 1 pont |
| hatszor ismétlődik. | 2 pont |
| A keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Első esemény („nincs hibás”). | | |
| A 100 készülékből 6-ot  -féleképpen lehet kiválasztani, ez az összes esetek száma | 2 pont |  |
| Ezek között esetben mind a 6 kiválasztott készülék jó. | 1 pont |  |
| Tehát a keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| A „nincs hibás” esemény bekövetkezésének valószínűsége: | 1 pont\* | A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk. |
| Második esemény („legalább két hibás van”). Első megoldás. | | |
| A „legalább két hibás van” esemény komplementere a „legfeljebb 1 hibás van”. | 2 pont |  |
| Ez utóbbi esemény két, egymást kizáró esemény összege, nevezetesen a „0 hibás van” és az „1 hibás van ” eseményeké. | 1 pont | Ezek a pontok akkor is járnak, ha a leírt gondolatmenet a megoldásból derül ki. |
| Ezek valószínűségét összeadva kapjuk a komplementer esemény bekövetkezésének valószínűségét: | 1 pont |
|  | 1 pont | A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk; Ha korábbról így számol, akkor például 0,84 is elfogadható. |
| A „legalább két hibás van” esemény bekövetkezé- sének valószínűsége: 1–0,849, azaz kb. 0,151 | 1 pont \* | A két tizedesjegyre kerekített értéket is elfogadjuk, viszont, ha korábbról így számol, akkor 0,16 is elfogadható. |
| Második esemény („legalább két hibás van”). Második megoldás | | |
| Összeadjuk a „pontosan 2, 3 4, 5, 6 hibás van” események valószínűségeit, azaz | 5 pont | 1–1 pont eseményenként |
| A „legalább két hibás van” esemény bekövetkezésének valószínűsége: ≈0,1291 + 0,0203 + 0,0016 + 0,0001 + 0,000 =  = 0,151. | 1 pont\* | A két tizedes jegyre kerekített értéket is elfogadjuk |
|  |  |  |
| Tehát az első esemény bekövetkezése a valószínűbb. | 1 pont\* |  |
| **Összesen:** | 12 pont |  |
| A \*-gal jelzett 3 pontot megkapja abban az esetben is, ha a két valószínűség numerikus értékét nem számítja ki, de a nagyságuk közötti viszonyt más úton jól bizonyítja. | | |

**Emelt szint**

**2010 május, matematika I 4.**

*Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik. *

1. *A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1. üzlet* | *2. üzlest* | *3. üzlet* | *Összesített forgalom* |
| *Arany János* |  |  |  |  |
| *Márai Sándor* |  |  |  |  |
| *József Attila* |  |  |  |  |
| *Összesen* | *408* | *432* | *216* |  |

1. *Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!*

*A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mindkét könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A kördiagramok alapján:   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *1. üzlet* | *2. üzlest* | *3. üzlet* | *Összesített forgalom* | | *Arany János* | *119* | *90* | *72* | *281* | | *Márai Sándor* | *119* | *126* | *117* | *362* | | *József Attila* | *170* | *216* | *27* | *413* | | *Összesen* | *408* | *432* | *216* |  | | **4 pont** | Helyes oszloponként 1-1 pont, 4. pont az összesítő oszlopért jár. |
| A legtöbb példányt József Attila műveiből adták el. | **1 pont** |  |
| **Összesen** | **5 pont** |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Jó adatokat tüntet fel. | 1 pont |  |
| Arányos a diagram. Célszerűen választ egységet. | 1 pont |  |
| Rendezett az ábrája, világosan látni, mi-mit jelöl. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont | Ezen kívül csak olyan diagram fogadható el, amelyiken a két tengely fel van cserélve |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A vizsgált időszakban a sorsoláson résztvevő sorsjegyek száma: 408+432+216 = 1056. | 1 pont | Az 1056 megjelenéséért (akár a táblázatban is). |
| Ezek közül a 2 nyerő sorsjegyet összesen  féleképpen lehet kisorsolni. | 1 pont | Az összes esetek száma 1 pont, a kedvező eseteké 1 pont. Ha a kedvező és az összes esetek számát is a sorrend figyelembevételével helyesen számolja össze, akkor is jár az 1-1 pont. |
| A 2. üzletben 126 Márai-könyvhöz adtak sorsjegyet, ezek közül  2 126 féleképpen lehet 2 nyerőt kiválasztani. | 1 pont |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | Ha a k/n képletet előzmény nélkül használja, nem jár pont. |
| Ennek értéke: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 5 pont |  |

**2010 május, matematika II 5.**

*Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.*

1. *Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára?*

*A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.*

1. *Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?*

*Megoldás:*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha a legolcsóbb kiszerelés egységára 600 Ft, a másik kettőé ennek 125%-a, azaz 750-750 Ft. | **1 pont** |  |
| A három kiszerelés átlagos egységára: | **1 pont** |  |
| A negyedik kiszerelésen 700 Ft egységár szerepelt. | **1 pont** |  |
| Összesen: | **3 pont** |  |

**2010 május, matematika II 8.**

1. *Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.* 
   * + - 1. *Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?*
         2. *Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége: − senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt; vagy − pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?*
2. *Egy szabályos érme egyik oldalán a 6-os, a másikon pedig a 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?*

*Megoldás:*

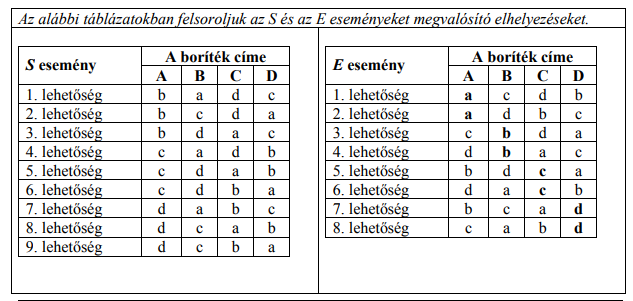
**A/b 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezések mindegyikének azonos a valószínűsége | 1 pont | Az összes (elemi) események számáért. |
| (Jelölje S azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet.) Az S esemény pontosan akkor következik be, ha az első borítékba, B, C vagy D jelű fotó kerül. Bármelyiket is helyezte ezek közül az első borítékba, a maradék hármat – úgy, hogy senki se kapja a sajátját – háromféleképpen lehet elhelyezni, (például: BADC, BCDA, BDAC). | 2 pont | A kedvező esetek számáért összesen 3 pont jár. |
| Hasonlóan 3-3 megfelelő elhelyezés lehetséges, ha az első helyre C-t vagy D-t teszi. Az S esemény tehát 9-féle elhelyezés esetén valósítható meg: | 1 pont |
| (Jelölje E azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet.) Az E esemény pontosan akkor következik be, ha az A, a B, a C vagy a D fénykép kerül csak a megfelelő betűjelű borítékba. | 1 pont | A kedvező esetek számáért összesen 3 pont jár |
| Ezek közül bármelyik kétféleképpen lehetséges (lásd a1 megoldását). | 1 pont |
| Így az E eseményt 8-féle elhelyezés valósítja meg: | 1 pont |
|  | 1 pont |  |

**A/b 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (Jelölje S azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet.) Az S esemény pontosan akkor következik be, ha az abcd sorrendben elhelyezett borítékokba BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 9 kedvező eset. | 3 pont | A felsorolásban elkövethető hibák: kimarad eset, hibás esetet is hozzávesz, egy esetet többször szerepeltet. Hibánként 1-1 pontot vonjunk le. |
| (Jelölje E azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet.) Az E esemény pontosan akkor következik be, ha az abcd sorrendben elhelyezett borítékokba ACDB, ADBC, BCAD, BDCA, CABD, CBDA, DACB, DBAC sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset. | 3 pont | Ez az a1)-beli esetek számának négyszerese. Ha csak ezt írja, ezért is jár a 3 pont. Lásd: előző megjegyzés. |
| A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezések mindegyikének azonos a valószínűsége. | 1 pont | Az összes események egyezőségéért. |
|  | 1 pont |  |

**B 1. megoldás**



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Mivel minden dobás kétféle lehet, ezért a négy dobás összes lehetséges – egyenlően valószínű – sorrendje  lehet. | 1 pont |  |
| A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek: 6+6+6+6=24,  6+6+6+4=22,  6+6+4+4=20,  6+4+4+4=18,  4+4+4+4=16 | 1 pont |  |
| Az  és az esemény is egyféleképpen valósulhat meg, ezért | 1 pont |  |
| Az  és az esemény is 4-féleképpen valósulhat meg, ezért | 1 pont |  |
| Az esemény , azaz 6 féleképpen valósulhat meg, ez | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**B 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek: 6+6+6+6=24,  6+6+6+4=22,  6+6+4+4=20,  6+4+4+4=18,  4+4+4+4=16 | 1 pont |  |
| Bármelyik dobásnál a 6-os és 4-es is 1/2 valószínűséggel következik be. | 1 pont |  |
| Az  események valósznűségét a p=1/2, n=4 paraméter binomiális eloszlás írja le. | 1 pont |  |
| Ezért | 2 pont | Egy vagy két rossz (vagy hiányzó) érték esetén 1 pont adható. |
| **Összesen** | 5 ponts |  |

**2010 május, matematika magyar, mint idegen nyelv I 4.**

*Felmérések szerint az internetes kapcsolattal rendelkezők 17%-a vásárol az interneten, 33%-a tölt le szoftvert az internetről. A statisztika szerint az internetezők 14%-a mindkét szolgáltatást igénybe veszi. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?*

1. *Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten.*
2. *Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy vásárol az interneten, vagy szoftvert tölt le. (Megengedve, hogy esetleg mindkét szolgáltatást igénybe veszi.)*
3. *Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten és szoftvert sem tölt le az internetről.*
4. *Három véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy közül egyik sem vásárol az interneten. (A kiválasztást visszatevéses módszerrel végzik el.)*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Legyen V az interneten vásárlás eseménye, L pedig a letöltés eseménye. Mivel P(V) = 0,17, | 1 pont | Járnak a pontok, ha a megoldásban jól megjelennek ezek a gondolatok. |
| ezért az ellentett (komplementer) esemény valószínűsége: | 1 pont |
|  | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 3 pont | Venn-diagramm alapján közölt eredmény is 3 pontot ér. |

**B 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A V+L esemény bekövetkezésének valószínűségét keressük. | 1 pont | Járnak a pontok, ha a megoldásban jól megjelennek ezek a gondolatok. |
| Mivel P(V+L) = P(V) + P(L) – P(VL), | 1 pont |
| ahol P(VL) = 0,14 | 1 pont |  |
| Így P(V + L) = 0,17 + 0,33 – 0,14 = 0,36 (36 %). | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 4 pont |  |

**B 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Venn-diagrammal szemléltetve a vásárlók és letöltők halmazát: | 1 pont |  |
| A VL halmazba tartozás valószínűségét keressük | 1 pont | Járnak a pontok, ha a megoldásban jól megjelennek ezek a gondolatok. |
| P(V vagy L) = P(V) + P(L) –P(V és L) ismerete | 1 pont |
| P(V + L) = 0,36 (36 %). | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 4 pont |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ez az esemény az előző esemény komplementere, | 2 pont |  |
| Ezért:  (64%) | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**D**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A három tulajdonos mindegyike egymástól függetlenül 0,83 valószínűséggel nem vásárol az interneten, | 2 pont |  |
| ezért P(egyikük sem vásárol) | 1 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| **Összesen** | 4 pont |  |

**2010 május, matematika magyar, mint idegen nyelv II 5.**

*Egy iskola tanulóinak tanév végi létszáma az egyik tanévben 400-nál több volt, de nem érte el a 430-at. A tanév végén kiszámították, hogy a fiúk tanulmányi eredményének átlaga 4,01, a lányoké 4,21, míg az iskola összes tanulójáé 4,12. (Ezen három átlag mindegyike pontos érték.) Hányan jártak az iskolába az adott tanév végén?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Legyen a fiúk száma  A tanulmányi eredményük összege: 4,01f | 1 pont |  |
| A lányok száma: l  A tanulmányi eredményük összege: 4,21l | 1 pont |  |
| Az iskola tanulóinak száma:  A tanulmányi eredményük összege: 4,12 | 1 pont |  |
|  | 2 pont |  |
| Rendezés után: . | 2 pont |  |
| A létszám: | 1 pont\* |  |
| Mivel f + l egész szám, így f osztható 9-cel | 2 pont\* |  |
| A feltétel szerint: | 1 pont\* | Az összlétszámot l segítségével is kifejezheti.    Ez a pont akkor is jár, ha a megoldás elején felírja, hogy x összes tanuló esetén  400 < x < 430 |
| Ebből 5 180 < f < 193,5 . | 1 pont\* |  |
| Mivel f osztható 9-cel, ezért f = 189. | 1 pont\* |  |
| L=231 | 1 pont\* |  |
| Tehát az iskola tanulóinak létszáma: 189 + 231 = 420. | 1 pont\* |  |
| Ellenőrzés a szöveg alapján. | 1 pont | A \*-gal jelölt 8 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja: ha a fiúk és lányok aránya 9:11, akkor a tanulók összlétszáma osztható 20-szal (4 pont). Mivel a 400 és 430 közé eső egész számok közül csak a 420 osztható 20-szal (2 pont), ezért a tanulók összlétszáma 420 (2 pont). |
| **Összesen** | 16 pont |  |

**2010 május, matematika magyar, mint idegen nyelv II 7.**

*A 12.A osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. Az osztály mind a harminc tanulója szívesen menne, bár közülük 12 tanulónak akkor különórája lenne. A választást a véletlenre bízzák: felírják a 30 nevet egy-egy cédulára, és ötöt kihúznak közülük.*

1. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisorsolt tanulók közül pontosan 2 olyan lesz, akinek különórája lenne? Az eredményt tizedestört alakban adja meg!*
2. *Tudjuk, hogy a kiválasztott öt tanuló között biztosan van olyan, akinek van különórája. Mennyi ekkor a valószínűsége annak, hogy pontosan két kisorsolt tanulónak van különórája?*

*A döntő után az öt tanuló a következőképpen számolt be a mérkőzésről:*

1. *A vesztes csapat 4-nél több gólt dobott.*
2. *A győztes csapat 3-mal többször talált a kapuba, mint a vesztes.*
3. *Összesen 10-nél több, de 28-nál kevesebb gól született a mérkőzésen.*
4. *A két csapat együttesen dobott góljainak a száma prímszám.*
5. *A vesztes csapat is prímszámú gólt dobott.*
6. *Tudjuk, hogy mind az öt tanuló igazat mondott. Megállapítható-e ezek alapján egyértelműen, hogy mi lett a döntő végeredménye?*

*Meoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 30 tanuló közül 5-öt -féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont |  |
| A vizsgált esetben 12 tanuló közül választunk ki 2 tanulót, és ettől függetlenül a többi 18 közül 3 tanulót. Ezt féleképpen lehet megtenni | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy pontosan két tanulónak van különórája:  = | 1 pont |  |
|  | 1 pot | Bármelyik alak elfogadható végeredményként, például a 0,3779 és a 0,38 is |
| **Összesen** | 4 pont |  |

**B 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Jelöljük B-vel azt az eseményt, hogy a kiválasztottak között található olyan, akinek van különórája, az Ai pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztottak közül pontosan i tanulónak van különórája. |  |  |
| feltételes valószínűséget kell kiszámítani. | 1 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| (P(B)-t a komplementer esemény valószínűségének segítségével kapjuk meg:) | 1 pont |  |
| Mivel | 1 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| ≈ 1− 0,0601 ≈ 0,940. | 1 pont | Más jó kerekítéssel kapott értéket is fogadjunk el. |
| Ezért a keresett valószínűség: | 1 pont | tört alak (vagy annak változatai pl. ) is elfogadható eredményként |
| **Összesen** | 7 pont | Ha a vizsgázó nem írja fel a feltételes valószínűségre vonatkozó összefüggést, de jól használja, a megfelelő pontszám akkor is jár. |

**B 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| olyan eset van, amelyben a kiválasztott 5 tanuló között van különórára járó. | 2 pont |  |
| Ennek értéke 133 938. | 1 pont |  |
| Ezen esetek mindegyike egyforma valószínűséggel következik be. | 1 pont |  |
| Ezen 133 938 eset közöt  = 53 856 olyan eset van, amelyben a különórás tanulók száma pontosan kettő | 2 pont |  |
| Tehát a kérdezett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen** | 7 pont |  |

**Közép szint**

**2010 október, matematika II 15**

*Egy kockajátékban egy menet abból áll, hogy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest, vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont. A menetet úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk?*
2. *Minek nagyobb a valószínűsége,*
   * *annak, hogy egy menetben szerzünk pontot, vagy*
   * *annak, hogy egy menetben nem szerzünk pontot?*

*Megoldás:*

**A 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A kettős dobások minden kimenetele egyenlően valószínű, tehát alkalmazható a klasszikus modell.) Összesen  = 36-féle kettős dobás történhet. | 2 pont | Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is jár a 2 pont. |
| Az első dobás 2-féle, a második 4-féle lehet, | 1 pont |  |
| tehát 2·4 = 8 „jó” kettős dobás van, | 1 pont |  |
| így  annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kaptuk | 1 pont |  |
| **Összesen:** | 5 pont |  |

**A 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (Az első és második dobás függetlenek.) |  |  |
| Az első dobással  valószínűséggel szerez pontot a játékos, | 1 pont |  |
| a másodiknál  valószínűséggel nem kap pontot | 1 pont |  |
| A keresett valósznűség | 2 pon |  |
| Azaz | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pontosan 1 pontot akkor szerezhetünk, ha az első dobás jó (pontot érő), a második nem pontot érő, vagy fordítva, | 2 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont. |
| ez összesen 2·2·4 = 16 eset | 1 pont |  |
| 2 pontot szerezhetünk 2·2 = 4 esetben. | 1 pont |  |
| Így annak a valószínűsége, hogy egy menetben szerzünk pontot: | 1 pont | A lehetséges 36 esetből 20 esetben szerzünk pontot, |
| Annak, hogy nem szerzünk pontot, | 1 pont | 16 esetben nem szerzünk pontot |
| tehát az első eseménynek nagyobb a valószínűsége. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 7 pont |  |

**A és B másik módszer**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A táblázat első sora az első dobás, első oszlopa a második dobás lehetséges kimeneteleit mutatja. A mezőkbe a menet során elért pontszámok kerültek. 36 egyenlően valószínű eset van, használható a kombinatorikus modell.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 4 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | | 5 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | | 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | |
| A táblázat helyes kitöltése | 6 pont |  |
| |  | | --- | |  |   az a) eseménynek megfelelő mezőket mutatja:  a keresett valószínűség | 2 pont |  |
| b) Nem szerzünk pontot   |  | | --- | |  |   Mezők.  Valószínűsége . Ez kisebb, mint ½ ezért annak nagyobb a valószínűsége, hogy szerzünk pontot. | 4 pont |  |
| **Összesen:** | 12 pont |  |

**2010 október, matematika II 18**

*Megkérdeztek 25 családot arról, hogy hány forintot költöttek az elmúlt hónapban friss gyümölcsre. A felmérés eredményét mutatja az alábbi táblázat:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *3500* | *4500* | *5600* | *4000* | *6800* |
| *4000* | *3400* | *5600* | *6200* | *4500* |
| *500* | *5400* | *2500* | *2100* | *1500* |
| *9000* | *1200* | *3800* | *2800* | *4500* |
| *4000* | *3000* | *5000* | *3000* | *5000* |

*(Az adatokat tekintsük pontos értékeknek!)*

1. *Hány forintot költöttek átlagosan ezek a családok friss gyümölcs vásárlására az elmúlt hónapban?*
2. *Ossza 1000 Ft terjedelmű osztályokba a fenti értékeket, kezdve a 0-1000 Ft, 1001-2000 Ft stb. osztályokkal, és ábrázolja ezeknek az osztályoknak a gyakoriságát oszlopdiagramon!*
3. *Az 500 Ft és a 9000 Ft kiugró értékek.*

*Mennyi a megmaradt adatok átlaga, ha ezeket a kiugró értékeket elhagyjuk az adatok közül? Hány százalékos változást jelent ez az eredeti átlaghoz képest, és milyen irányú ez a változás? Mennyi az így keletkezett új adatsor terjedelme?*

*(Az átlagot forintra, a százaléklábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)*

1. *Az eredeti mintát a vizsgálatot végző cég két új család megfelelő adatával bővítette. Az egyik az eredeti átlagnál 1000 Ft-tal többet, a másik ugyanennyivel kevesebbet költött havonta friss gyümölcsre. Mutassa meg számítással, hogy így az átlag nem változott!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A 25 elemű mintában az elemek összege 101 400. | **1 pont** |  |
| Így az átlag | **1 pont** |  |
| =4056(Ft) | **1 pont** |  |
| **Összesen** | **3 pont** |  |

**B**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Az 1000 Ft-os osztályokba sorolt adatok gyakorisági táblázata   |  |  | | --- | --- | | Havi költség Ft-ban | Családok száma | | 1-100 | 1 | | 1001-2000 | 2 | | 2001-3000 | 5 | | 3001-4000 | 6 | | 4001-5000 | 5 | | 5001-6000 | 3 | | 6001-7000 | 2 | | 7001-8000 | 0 | | 8001-9000 | 1 | | 3 pont | 1 vagy 2 hibás adat esetén 2 pont jár, 3-4 hibás adatért 1 pont jár, 4-nél több hiba esetén nem jár pont |
|  | 2 pont | A tengelyek felcseré- lésével készített helyes diagram is teljes értékű. Hibás adatokat is tartalmazó adatsorból készített jó diagramért (jók a tengelyek, azokon jók az egységek) jár a 2 pont. |
| **Összesen:** | 5 pont |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A két szélső adat elhagyásával az új átlag: | 1 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| Mivel | 1 pont |  |
| ezért az átlag ≈1,48%-kal csökkent. | 1 pont | 1,49% is elfogadható. |
| Az új adatsor legkisebb eleme 1200 Ft, legnagyobb eleme 6800 Ft, | 1 pont |  |
| így terjedelme 5600 Ft. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**D**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az új átlag | 2 pont | Helyes számláló 1 pont, helyes nevező 1 pont. |
| =4056. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**Emelt szint**

**2010 október, matematika I 4.**

*Egy felmérés során megkérdeztek 640 családot a családban élő gyermekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | *Fiúk száma* | | | | | |
| *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| *Lányok száma* | *0* | *160* | *103* | *61* | *8* | *5* | *0* |
| *1* | *121* | *58* | *11* | *4* | *1* | *1* |
| *2* | *54* | *15* | *3* | *2* | *2* | *2* |
| *3* | *9* | *3* | *1* | *1* | *0* | *1* |
| *4* | *6* | *3* | *1* | *1* | *1* | *0* |
| *5* | *1* | *0* | *1* | *0* | *0* | *0* |

*(Tehát pl. a gyermektelen családoknak a száma 160, és 15 olyan család volt a megkérdezettek között, amelyben 1 fiú és 2 lány van.)*

1. *Hány fiúgyermek van összesen a megkérdezett családokban?*
2. *A felmérésben szereplő legalább kétgyermekes családokban mennyi a leggyakoribb leányszám?*
3. *A családsegítő szolgálat a megkérdezett családok közül a legalább négy gyermeket nevelőket külön támogatja. Az alábbi táblázat kitöltésével készítsen gyakorisági táblázatot a külön támogatásban részesülő családokban lévő gyermekek számáról!*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Gyermekszám egy családban* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *gyakoriság* |  |  |  |  |  |  |  |

*Hány családot és összesen hány gyermeket támogat a családsegítő szolgálat?*

*Megoldás*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A fiúk számát az oszlopokban lévő adatok alapján számoljuk ki: | 1 pont | Ha ez a gondolat a számolásból derül ki, ez a pont akkor is jár |
| (103 + 58 + 15 + 3 + 3 + 0) + 2⋅(61 + 11 + 3 + 3⋅1) + + 3⋅16 + 4⋅9 + 5⋅4 = | 1 pont |  |
| = 442 fiú van összesen a megkérdezett családokban | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A lányok számát a táblázatból soronként számolhatjuk ki, de a gyermektelen és az egygyermekes családok adatait (160, illetve a 103 és a 121) nem vesszük figyelembe. Nincs lány 61+8+5=74 családban. | **1 pont** |  |
| 1 lány van 58+11+4+1+1=75 családban. | 1 pont |  |
| 2 lány van 54+15+3+2+2+2=78 családban. | 1 pont |  |
| 3 lány van 9+3+1+1+1=14 családban.  4 lány van 6+3+1+1+1=12 családban.  5 lány van 1+1= 2 családban | 1 pont | Ez a pont jár akkor is, ha csak megállapítja, hogy 78-nál nagyobb összeget már nem kaphat a táblázatból, de nem számolja ki az összegeket |
| A legalább kétgyermekes családokban leggyakoribb leányszám tehát 2. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**C**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *Gyermekszám egy családban* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | | *gyakoriság* | *21* | *8* | *5* | *4* | *2* | *0* | *0* | | | |
| A gyakoriság helyes értelmezése. | 1 pont | Ha a dolgozatból kiderül, ez a pont jár. |
| A táblázatban van legalább 4 helyes gyakoriság. | 1 pont |  |
| Minden gyakoriság helyes. | 1 pont |  |
| A támogatott családok száma: 40 | 1 pont | Ha rossz gyakorisági adatokkal elvileg helyesen és pontosan számolt, akkor is kapja meg ezeket a pontokat. |
| A támogatott gyermekek száma:  21⋅4 +8⋅5+ 5⋅6 + 4⋅7 + 2⋅8 = | 1 pont |
| = 198 | 1 pont |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**2010 október, matematika II 8.**

1. *Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10, 20, 50, 100 és 200 forintos érmékkel), és pontoson kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethet Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett? (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe.)*

*A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel.*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ( 0 < p < 1), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?*

*Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényén?*
2. *A telitalálat szempontjából a b) vagy a c)-ben leírt játék kedvezőbb Bandi számára?*

*Megoldás*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bandinak telitalálata háromféle esetben lehet: (1) az első húzásnál telitalálata van, és a második húzásnál is telitalálata van (ugyanazokat a számokat húzták ki kétszer egymás után): ennek valószínűsége p⋅ p = | 1 pont |  |
| (2) az első húzásnál telitalálata van, a másodiknál nincs telitalálata: ennek valószínűsége p⋅(1− p)= p−  , | 1 pont |  |
| (3) az első húzásnál nincs telitalálata, a másodiknál telitalálata van: ennek valószínűsége (1− p) ⋅p= p− | 1 pont |  |
| Annak valószínűsége tehát, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen ezen három valószínűség összege: (ez nem negatív, hiszen 0 < p < 1). | 1 pont |  |
| **Összesen** | 4 pont |  |
| Megadjuk a pontozását annak a megoldásnak, ami a komplementer eseményre épül: A komplementer esemény: egyáltalán nincs telitalálata a két egymás utáni húzásnál: 1 pont ennek valószínűsége  , 1 pont  azaz annak, hogy van telitalálata:  a valószínűsége. 2 pont | | |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki. | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár az 1 pont. |
| (1) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a telitalálat esélye p. | 1 pont |  |
| (2) Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölti ki, akkor a telitalálatának esélye 2p. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | 4 pont |  |

**D**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy vagy p a nagyobb | 1 pont |  |
| Mivel 0 < p < 1, ezért , tehát az első játékszabály kedvezőbb. | 1 pont |  |
| Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy  vagy 2p a nagyobb | 1 pont |  |
| Mivel , ezért , tehát a második játékszabály kedvezőbb. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 4 pont |  |

**Közép szint**

**2011 május, matematika, I 2.**

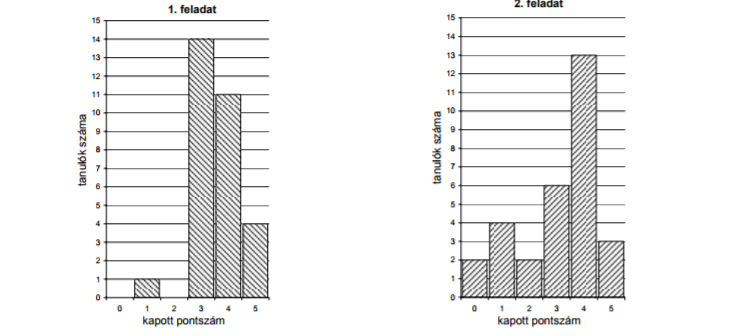
*A 2, 4 és 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával elkészítjük az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kiválasztott szám páratlan? Válaszát indokolja!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A képezhető háromjegyű számok száma:) 3!=6. | 1 pont |  |
| Ezek közül 2 páratlan. | 1 pont |  |
| Így a keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**2011 május, matematika, II 13.**

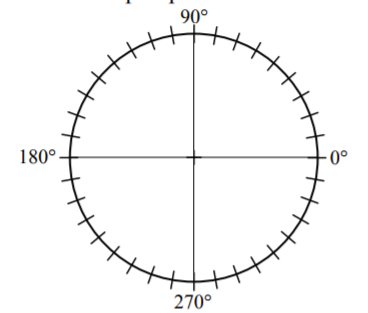
*Egy iskolai tanulmányi verseny döntőjébe 30 diák jutott be, két feladatot kellett megoldaniuk. A verseny után a szervezők az alábbi oszlopdiagramokon ábrázolták az egyes feladatokban szerzett pontszámok eloszlását:*

**

1. *A diagramok alapján töltse ki a táblázat üres mezőit! Az első feladatra kapott pontszámok átlagát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1. *Feladat* | 1. *Feladat* |
| *Pontszámok átlaga* |  | *3,10* |
| *Pontszámok mediánja* |  |  |

1. *A megfelelő középponti szögek megadása után ábrázolja kördiagramon a 2. feladatra kapott pontszámok eloszlását!*

**

1. *A versenyen minden tanuló elért legalább 3 pontot. Legfeljebb hány olyan tanuló lehetett a versenyzők között, aki a két feladat megoldása során összesen pontosan 3 pontot szerzett?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | 1. *Feladat* | 1. *Feladat* | | *Pontszámok átlaga* | *3,57* | *3,10* | | *Pontszámok mediánja* | *3,5* | *4* | | 3 pont | Minden helyes érték 1 pont. |
| *Összesen:* | 3 pont |  |

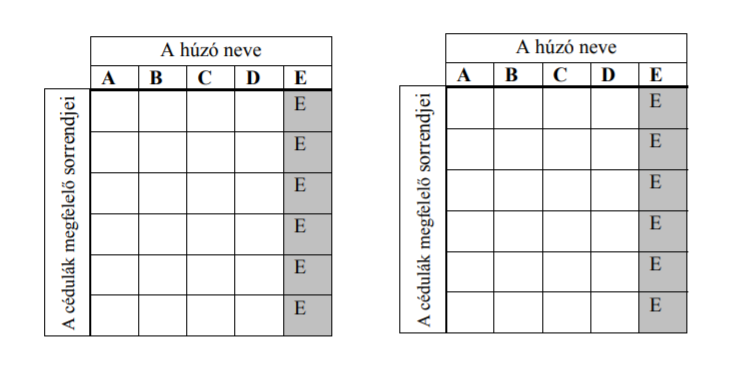
**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Egy tanulóhoz tartozó középponti szög: 12°. | 1 pont |  |
| 13 tanulóhoz 156°, 6 tanulóhoz 72°, 4 tanulóhoz 48°, 3 tanulóhoz 36°, 2 tanulóhoz 24° tartozik. | 1 pont | 4 helyes középponti szög esetén is jár az 1 pont. |
|  | 2 pont | Ha nincs jelmagyarázat a körcikkek mellett, akkor 1 pont adható. |
| **Összesen:** | 4 pont |  |

**2011 május, matematika, II 18.**

*András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papírcetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.*

1. *Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut?*
2. *Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!)*



1. *Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett?*

*Megoldás:*

**A 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre, | 3 pont |  |
| tehát a keresett valószínűség | 2 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**A 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A keresett p valószínűség a kedvező és az összes esetek számának hányadosa. | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont. |
| Az összes esetek száma 5! | 1 pont |  |
| András neve 4! esetben állhat az első helyen (kedvező esetek száma). | 2 pont |  |
| p = 0,2 | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**2011 május, matematika, magyar, mint idegen nyelv I 3.**

*Az alábbi táblázat egy nagy divatáru üzletben eladott pólók számát mutatja méretek szerinti bontásban:*

|  |  |
| --- | --- |
| *A pólók mérete* | *Eladott darabszám* |
| *XS* | *60* |
| *S* | *125* |
| *M* | *238* |
| *L* | *322* |
| *XL* | *198* |
| *XXL* | *173* |

1. *Mennyi az eladott M-es méretű pólók relatív gyakorisága?*
2. *Melyik az egyes pólók méretéből álló adatsokaság módusza?*
3. *Méretenként hány darabot adnának el ugyanekkora forgalom esetén, ha mindegyik méretből ugyanannyi kelne el?*

*Megoldás*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az M-es pólók relatív gyakorisága: | 1 pont | A legalább két tizedesjegyre történő helyes kerekítés is elfogadható. |
| Az L-es méret a módusz. | 1 pont | Ha 322-t válaszol, akkor is megkapja a pontot. |
| Átlagosan 186 darabot adtak el. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**2011 május, matematika, magyar, mint idegen nyelv I 17.**

*Egy játék egy fordulójában minden játékosnak egymás után háromszor kell dobnia egy szabályos dobókockával. Egy játékos egy fordulóban (a három dobásával) akkor nyer, ha:*

1. *mindhárom dobásának eredménye páros szám, ekkor a nyereménye 300 zseton;*
2. *az elsőre dobott szám az 1-es, és a következő két dobás közül pontosan az egyik páros, ekkor a nyereménye 500 zseton;*
3. *az első dobása 3-as, a többi pedig páratlan, ekkor a nyereménye 800 zseton;*
4. *mindhárom dobott szám az 5-ös, ekkor a nyereménye 2000 zseton.*
5. *Mekkora valószínűséggel nyer egy játékos egy fordulóban*

*a1) 300 zsetont;*

*a2) 500 zsetont;*

*a3) 800 zsetont;*

*a4) 2000 zsetont?*

1. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy játékos egy fordulóban nem nyer zsetont?*

*Megoldás*

**A 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Összesen -féle (egyenlően valószínű) dobássorozat lehetséges | 1 pont |  |
| a1) 300 zseton a nyeremény: Mindhárom dobás páros. Ez -féleképpen következhet be. | 1 pont |  |
| 300 zsetontvalószínűséggel nyerhet a játékos. | 1 pont |  |
| a2) 500 zseton a nyeremény: Az első dobás 1-es, a második páros és a harmadik páratlan. Ez 3⋅ 3 -féleképpen következhet be | 1 pont |  |
| Az, hogy az első dobás 1-es, a második páratlan és a harmadik páros szintén 3⋅ 3 -féleképpen teljesülhet. | 1 pont |  |
| A kedvező esetek száma 3⋅3 + 3⋅3 (=18) . | 1 pont |  |
| 500 zsetont valószínűséggel nyerhet a játékos. | 1 pont |  |
| a3) 800 zseton a nyeremény: Az első dobás 3-as, a másik kettő pedig páratlan. Ez 3⋅ 3 -féleképpen következhet be. | 1 pont |  |
| (Mivel a három dobás  -féle lehet, így) annak a valószínűsége, hogy 800 zsetont nyer | 1 pont |  |
| a4) 2000 zseton a nyeremény: Mivel a kedvező esetek száma 1, | 1 pont |  |
| így a 2000 zsetonos nyeremény valószínűsége | 1 pont |  |
| **Összesen** | 11 pont |  |

**A 2. Megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a1) 300 zseton a nyeremény: Mivel (a három dobás eredménye független egymástól, és) minden dobás eredménye  valószínűséggel lesz páros, | 1 pont |  |
| ezért 300 zsetont valószínűséggel nyerhet a játékos | 1 pont |  |
| a2) 500 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es less | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy a második páros és a harmadik páratlan | 1 pont |  |
| Ugyanennyi  annak a valószínűsége is, hogy a második dobás páratlan és a harmadik páros. | 1 pont | Vagy: a második és harmadik dobás eredménye paritás szempontjából 4-féle lehet (ps-ps, ps-pt, pt-ps és pt-pt), és mivel mindegyik ugyanakkora valószínűséggel következik be, a kedvező esetek bekövetkezésének valószínűsége 0,5. |
| Annak a valószínűsége, hogy az egyik dobás páros, a másik páratlan += | 1 pont |
| így 500 zsetont ⋅=valószínűséggel nyerhet a játékos. | 1 pont |  |
| a3) 800 zseton a nyeremény: Annak a valószínűsége, hogy az első dobás 3-asannak pedig, hogy a további két dobás páratlan | 1 pont |  |
| 800 zsetont ⋅=valószínűséggel nyerhet a játékos. | 1 pont |  |
| a4) 2000 zseton a nyeremény: A három dobás bármelyike során az 5-ös dobásának valószínűsége | 1 pont |  |
| (és mivel a három dobás eredménye független egymástól,) ezért 2000 zsetont ⋅⋅=valószínűséggel nyerhet a játékos. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 11 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A nyertes dobássorozat komplementer eseménye olyan forduló, amelyben nem nyer a játékos. | 2 pont | Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket a gondolatokat csak felhasználja a megoldása során. |
| Az esemény és a komplementer esemény valószínűségének összege 1. | 1 pont |
| Nyerési esély | 1 pont |  |
| Közös nevezőre hozás és helyes összeadás | 1 pont |  |
| Tehát annak a valószínűsége, hogy a játékos nem nyer | 1 pont |  |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**Emelt szint**

**2011 május, matematika I 4.**

*Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll. A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.*

* 1. *Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!*
  2. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl?*
  3. *Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n = 8 | 1 pont |  |
| p = 0,05 | 1 pont |  |
| a várható érték: n ⋅ p = 0,4 | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Minden gép 1− p = 0,95 valószínűséggel indul be a reggeli munkakezdéskor. | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: | 2 pont |  |
| ami ≈ 0,6634 ( 66,34%) | 1 pont | Bármely, legalább egy tizedesjegyre kerekített helyes érték elfogadható. |
| **Összesen** | 4 pont |  |

**C 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kérdéses esemény (A) komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz hogy legfeljebb 2 gép romlik el. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy komplementerrel számol. |
|  | 2 pont | Akkor is megkapja a 2 pontot, ha ez nincs leírva, de kiderül a helyes megoldásból. |
|  | 1 pont |  |
| ≈ 0,66342+ 0,27933+ 0,05146 ≈ 0,9942 | 2 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget. |
| P(A) = 1− P(B) = 1− 0,9942 = 0,0058 . Tehát valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége. | 1 pont | E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes kivonásért. |
| **Összesen** | 7 pont |  |

**C 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kérdéses esemény (A) pontosan akkor következik be, ha a meghibásodott gépek száma 3, 4, 5, 6, 7, vagy 8. Ha  jelöli azt az eseményt, hogy pontosan k db gép hibásodik meg, akkor  (Az Ak események páronként kizárják egymást, ezért) | 2 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy jó modellel számol |
|  | 2 pont | Ez, ha nincs explicit leírva, de kiderül a helyes megoldásból, akkor is megkapja a 2 pontot. Ha az összeg 1 tagja hiányzik vagy hibás, 1 pontot kap. |
| (Az összeg tagjait öt tizedesjegy pontossággal számítva az utolsó két tag már 0,00000-nak adódik,) P(A) ≈ (0,00542+ 0,00036+ 0,00002+ + 0,00001=) 0,00581 | 2 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget |
| Tehát négy tizedesjegyre kerekítve valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége. | 1 pont | E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes közelítésért |
| **Összesen:** | 7 pont |  |
| *Megjegyzés: Ha számolási hiba miatt nem kapja meg P(A) értékére közelítően a 0,0058-et, az utolsó 1 pontot nem kaphatja meg.* | | |

**2011 május, matematika II 6.**

*Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az  egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa A(1; –2).*

1. *Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon!*
2. *Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószí- nűsége annak, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!*

*Megoldás:*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kérdéses valószínűség a beírt szabályos háromszög és a kör területének hányadosa. | 2 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, akkor is jár a 2 pont |
| A kör területe: | 1 pont | Ha a vizsgázó a területek számszerű értékével számol ( ≈ 50,27 és ≈ 20,78), akkor is h járnak ezek a pontok |
| Az r sugarú körbe írt szabályos háromszög területe: = | 1 pont |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó százalékként adja meg két tizedesjegy pontossággal a választ (41,35%). |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**2011 május, magyar mint idegen nyelv matematika II 6.**

*Egy urnában egy fehér, egy piros és egy kék golyó található. Egymás után ötször húzunk az urnából egy-egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.*

1. *Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során kihúzott kék és piros golyók száma megegyezik?*
2. *Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során több kék golyót húzunk, mint pirosat?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| különböző húzás lehetséges, (ezek mindegyike azonos valószínűséggel következhet be) | 1 pont |  |
| Egyforma a kék és piros golyók száma, ha mindkettő 0, 1 vagy 2 | 1 pont | Ezt a pontot akkor is megkapja, ha a gondolatot ugyan nem írja le, de a megoldásából kiderül, hogy erre épít |
| Első eset 0 piros és 0 kék, azaz mind az öt fehér, ez 1-féleképpen lehetséges. | 1 pont |  |
| Második eset: 1 piros és 1 kék, 3 fehér, ez  -féleképpen következhet be. Harmadik eset: 2 piros és 2 kék, 1 fehér, ez  esetben következhet be | 3 pont |  |
| A kedvező esetek száma tehát 1+ 20 + 30 = 51. | 1 pont |  |
| A döntetlen játszma valószínűsége: | 1 pont |  |
| **Összesen** | 8 pont |  |

**B 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Három eset lehetséges: azonos a kihúzott piros és kék golyók száma, vagy több a kék vagy több a piros. | 2 pont | Ennél kevésbé részletezett helyes indoklás esetén is járnak ezek a pontok. |
| A különböző színű golyók azonos száma miatt | 1 pont |
| „a több piros mint kék golyó húzásának” esélye azonos „a több kék mint piros golyó húzásának” esélyével. | 2 pont |
| A több kék mint piros golyó húzásának esélye tehát: | 2 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| **Összesen** | 8 pont |  |

**B 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Közvetlenül megszámoljuk, hogy a 243 egyenlő valószínűségű eset közül hány végződik több kék mint piros golyó húzásával. Legyen az első szám a kék, a második a piros, a harmadik a fehér golyók száma: (1,0,4), (2,0,3), (3,0,2), (4,0,1), (5,0,0), (2,1,2), (3,1,1), (4,1,0), (3,2,0). | 1 pont |  |
| Mivel a különböző színek egyformán gyakoriak, ezért a fenti esetek közül azonosak valószínűség szempontjából a következők:  (1,0,4), (4,0,1), (4,1,0)  (2,0,3), (3,0,2), (3,2,0)  (5,0,0)  (3,1,1)  (2,1,2) | 1 pont |  |
| Az első hármas összesen -féleképpen | 1 pont |  |
| a második hármas | 1 pont |  |
| a harmadik (5,0,0) 1-féleképpen, míg a negyedik (3,1,1) -féleképpen következhet be. | 1 pont |  |
| Végül az ötödik (2,1,2) -féleképpen következhet be, azaz | 1 pont |  |
| a kedvező esetek száma: 15+ 30 +1+ 20 + 30 = 96. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűsége tehát: | 1 pont |  |
| **Összese** | 8 pont |  |

**Közép szint**

**2011 október, matamatika I 6.**

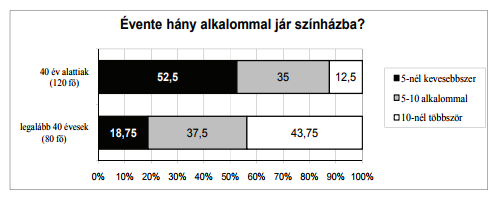
*Adja meg a 2; 11; 7; 3; 17; 5; 13 számok mediánját!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A medián: 7. | 2 pont | A pontszám nem bontható |

**2011 október, matamatika II 14.**

*Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti*

**

1. *Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban?*
2. *A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba?*
3. *A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínű- sége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!*

*uMegoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ. | 1 pont |  |
| 80-nak a 18,75%-a: 80⋅0,1875. | 1 pont |  |
| Tehát 15, legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 3 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A 40 év alattiak közül 120⋅0,35 =42 , | 1 pont |  |
| a legalább 40 évesek közül 80⋅0,375 = 30 | 1 pont |  |
| azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5−10 alkalommal jár színházba | 1 pont |  |
| Ez a szám a megkérdezettek 36%-a. | 1 por |  |
| **Összesen** | 4 pont |  |

**C 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az összes lehetséges kiválasztás: | 1 pont |  |
| Két 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között esetben. | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott 40 évnél fiatalabb: | 1 pont |  |
| A komplementer esemény valószínűsége: | 1 pont |  |
| Tehát 0,641 annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között. | 1 pont | Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár. |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**C 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az összes lehetséges kiválasztás: | 1 pont |  |
| Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: | 1 pont |  |
| különböző korosztályú: 80⋅120 (= 9600) esetben. | 1 pont |  |
| A kérdezett esemény valószínűsége: | 1 pont |  |
| Tehát 0,641 a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között. | 1 pont | Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár. |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**2011 október, matamatika II 14.**

*Egy csonkakúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.*

1. *Hány cm3 tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg? Válaszát tíz cm3 -re kerekítve adja meg!*
2. *A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg*!

*Megoldás:*

**B 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Komplementer eseménnyel számolunk. | 1 pont | Ezt a pontot akkor is megkapja, ha ez a gondolat csak a számításokból derül ki. |
| Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97. | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy az ellenőr nem talál selejtes terméket | 2 pont |  |
| tehát annak a valószínűsége, hogy talál selejtest 1- | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség két tizedesjegyre kerekítve 0,26. | 1 pont | Ha a valószínűséget szá- zalékban adja meg a vizsgázó (26%, illetve 26,26%), akkor is jár ez a pont. |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**B 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97 | 1 pont |  |
| Legyen P(k) annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 doboz között k darab selejtes van          Az 5 ≤ k ≤ 10 esetben mindegyik valószínűség 0,00001-nél kisebb lesz, tehát a két tizedesjegyre kerekített értéket ezek összege nem befolyásolja | 3 pont | 1 pont jár, ha legalább egy esetben jól alkalmazza a binomiális eloszlásra vonatkozó összefüggést (jól helyettesít be). 1 pont jár, ha azt tudja, hogy 10 esetet kell vizsgálnia. Teljes pontszámot (3 pont) akkor kaphat, ha a fent leírt megoldás gondolatmenetét alkalmazva jut jó eredményre, illetve ha mind a 10 esetet helyesen felírja. |
| A kérdezett valószínűség tehát körülbelül 0,228+ 0,032+ 0,003 = 0,263, | 1 pont |  |
| két tizedesjegyre kerekítve 0,26. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**Emelt szint**

**2011 október, matamatika I 2.**

*Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1988 | | 2050 (előrejelzés) | |
| Sorrend | Ország | Népességszám (millió fő) | Ország | Népességszám (millió fő) |
| 1 | Kína | 1255 | India | 1533 |
| 2 | India | 976 | Kína | 1517 |
| 3 | Egyesült államok | 274 | Pakisztán | 357 |
| 4 | Indonézia | 207 | Egyesült Államok | 348 |
| 5 | Brazília | 165 | Nigéria | 339 |
| 6 | Oroszorszg | 148 | Indonézia | 318 |
| 7 | Pakisztán | 147 | Brazlyia | 243 |
| 8 | Japán | 126 | Banglades | 218 |

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

*Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző évben növekedett.*

1. *Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értéké- vel számoljon!)*
2. *A táblázat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 kö- zött? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg.)*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pakisztán lakosságszáma az előrejelzés alapján 147 millióról 357 millióra nő 62 év alatt. | 1 pont |  |
| Így ha az évi növekedés p százalékos, akkor | 1 pont |  |
| Ahonnan | 1 pont |  |
| Kiszámolva (a kért kerekítéssel) p ≈ 1,44%. | 1 pont |  |
| A vizsgált növekedési időszak 32 év, | 1 pont |  |
| így a feltételezés és az előrejelzés alapján 2020-ban Pakisztán lakossága | 1 pont |  |
| ≈ 232 (millió fő). | 1 pont |  |
| **Összesen** | 7 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hat ország szerepel mindkét oszlopban: Kína, India, Egyesült Államok, Indonézia, Pakisztán, Brazília | 1 pont | Ha ez a gondolat a megoldás menetéből derül ki, akkor is jár ez a pont |
| Erre a hat országra nézve a népesség átlaga (millió főben) 1988-ban:    És 2050-ben | 1 pont | Ha valamelyik adat hiányzik, vagy hibás, ez az 1 pont nem jár. |
| Az átlagos népességszám közelítőleg 215,33 (millió fő)-vel nő | 1 pont |  |
| (Mivel a minta hatelemű, ezért a medián a rendezett adatsokaság két középső elemének átlaga.) Így a medián 1988-ban: | 1 pont | Ha valamelyik adat hiányzik, vagy hibás, ez az 1 pont nem jár |
| A medián is nő, 112 (millió fő)-vel. | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**2011 október, matamatika I 3.**

*Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. Az alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Keringő* | *Kán-kán* | *Hip-hop* | *Egyik sem* |
| *Lány* | *9* | *6* | *10* | *2* |
| *fiú* | *9* | *0* | *4* | *2* |

*Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.*

1. *A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínű- sége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban?*
2. *Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínű- sége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Mivel minden fiú legfeljebb egy táncban lépett fel, ezért a fiúk száma a táblázat alapján 15, | 1 pont |  |
| a lányok száma pedig 17. | 1 pont |  |
| A 17 lányból kettőt -féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont |  |
| 6 lány táncolt kán-kánt, közülük kettőt -féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A pontosan két táncban fellépő diák csak lány lehet | 1 pont | Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a 2 pont. |
| Mivel 2 lány egyik táncban sem lépett fel, ezért 15 lány között kell keresnünk a pontosan kétszer táncolókat. | 1 pont |
| Ha a pontosan kétszer táncolók közül x a keringőző és kán-kánozó, y a kán-kánozó és hip-hopozó, z pedig a keringőző és hip-hopozó lányok száma, akkor a csak keringőző lányok száma 9 – x – z – 2, | 1 pont | Ha jól kitöltött Venn-diagramm alapján, vagy más logikai úton jut el a helyes részeredményhez, akkor is jár az 5 pont. |
| a csak kán-kánozó lányok száma 6 – x – y – 2, | 1 pont |
| csak hip-hopozó lányok száma 10 – y – z – 2. | 1 pont |
| A logikai szita formula alapján (9 – x – z – 2) + (6 – x – y – 2) + (10 – y – z – 2) + x + y + z + 2 = 15. | 1 pot |
| ahonnan x + y + z = 6. | 1 pont |
| Az osztály tanulói közül egy diák kiválasztására 32 lehetőségünk van | 1 pont |  |
| így a keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen** | 9 pont |  |

**2011 október, matamatika I 3.**

1. *Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét: A: a dobott pontok összege prím; B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.*
2. *Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?*
3. *Az ABCD négyzet csúcsai* *Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az* *függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A dobott pontok összege a következő esetekben lesz prím: 1+1, 1+2, 1+4, 2+3, 1+6, 2+5, 3+4, 5+6. | 1 pont |  |
| Az 1+1 eset kivételével mindegyik összeg kétféleképpen valósulhat meg, így az A eseményt 15 elemi esemény valósítja meg. | 1 pont |  |
| (Az összes elemi esemény száma 6 ⋅ 6 = 36 , ezért) | 1 pont |  |
| A dobott pontok összege a következő esetekben lesz 3-mal osztható: 1+2, 1+5, 2+4, 3+3, 3+6, 4+5, 6+6. | 1 pont |  |
| A 3+3 és 6+6 esetek egyféleképpen, a többi kétféleképpen valósulhat meg, | 1 pont |  |
| Így | 1 pont |  |
| **Összesen** | 6 pont |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A hat számjegyből hármat különböző módon tudunk kiválasztani. | 1 pont |  |
| A 4-gyel oszthatóság szabálya alapján kedvező esetet kapunk, ha a kiválasztott három számjegy között van kettő olyan, amelyekből 4-gyel osztható kétjegyű szám képezhető. | 1 pont | Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont |
| Ezek között négy olyan hármas van, amely nem tartalmaz két megfelelő számjegyet: (1, 3, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5). | 2 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megfelelő számhármasokat (16 db) sorolja fel vagy számolja össze helyesen. Egy pont jár, ha legfeljebb két számhármast téveszt el. |
| Így a keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A négyzet és az f függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal. | 1 pont | Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont |
| A négyzet területe | 1 pont |  |
| A koordinátatengelyek és az f függvény grafikonja által határolt tartomány területe: = | 1 pont | Ha a vizsgázó indoklás nélkül közli, hogy a keresett terület 1, akkor 1 pontot kap. |
|  | 1 pont |
| (A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség:) | 1 pont |  |
| **Összesen** | 5 pont |  |

**2012 május-június, matematika középszint**

**I/9.** *Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínű-*

*sége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz?*

*Válaszát indokolja!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Két kockával 3-féleképpen lehet a dobott számok összege 4: (1; 3), (2; 2), (3; 1). | 1 pont |  |
| Két kockával összesen  -félét dobhatunk. | 1 pont |  |
| Így a kérdéses valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**II/17***. Az alábbi táblázat András és Bea érettségi érdemjegyeit mutatja.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *András* | *Bea* | *Cili* |
| *Magyar nyelv és irodalom* | *3* | *4* |  |
| *Matematika* | *4* | *5* |  |
| *Történelem* | *4* | *4* |  |
| *Angol nyelv* | *3* | *5* |  |
| *Földrajz* | *5* | *5* |  |

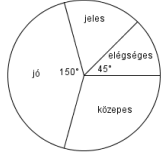
1. *Számítsa ki András jegyeinek átlagát és szórását!*

*Cili érettségi eredményéről azt tudjuk, hogy jegyeinek átlaga András és Bea jegyeinek átlaga közé esik, továbbá Cili jegyeinek a szórása 0.*

1. *Töltse ki a táblázatot Cili jegyeivel!*

*Dávid is ebből az 5 tárgyból érettségizett, az 5 tárgy az ő bizonyítványában is a fenti sorrendben szerepel. Eredményeiről azt tudjuk, hogy jegyeinek mediánja 4, átlaga pedig 4,4 lett.*

1. *Határozza meg Dávid osztályzatait és azt, hogy hányféleképpen lehetne ezekkel az osztályzatokkal kitölteni az érettségi bizonyítványát!*

*Az ábra a 24 fős osztály érettségi eredményeinek megoszlását mutatja matematikából. Tudjuk, hogy jeles osztályzatot 4 tanuló ért el. *

1. *Az osztály tanulói közül hányan érettségiztek közepes eredménnyel matematikából?*

*Megoldás:*

**A.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| András jegyeinek átlaga 3,8, | 1 pont | Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel jól számol. |
| így jegyeinek szórása | 1 pont |
| ≈ 0,75 . | 1 pont |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

*Megjegyzés: Ha számológéppel ún. „korrigált szórást” számol (≈ 0,84), akkor 2 pontot kap.*

**B.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| András jegyeinek átlaga 3,8, Bea jegyeinek átlaga 4,6. | 1 pont |  |
| Mivel Cili jegyeinek szórása 0, ezért minden jegye azonos. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
| Így Cilinek minden jegye 4-es. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dávid jegyeinek összege 22, | 1 pont |  |
| jegyeit nagyság szerint sorba rendezve a középső 4-es. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
| A jegyek között 1-es, 2-es és 3-as nem szerepelhet. Négy darab 4-ese nem lehet, mert akkor a jegyek összege nem lehet 22. | 1 pont | Ez a pont bármilyen helyes indoklás esetén jár. |
| Dávid jegyei: 4; 4; 4; 5; 5. | 1 pont |  |
| Ezekkel a jegyekkel érettségi bizonyítványát | 2 pont | Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó felsorolja az összes lehetséges esetet. |
| = 10 -féleképpen lehet kitölteni. | 1 pont |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

**D.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Jeles osztályzatot az osztály  része ért el, a hozzájuk tartozó körcikk középponti szöge 60°. | 1 pont |  |
| A közepes osztályzatot elérőkhöz tartozó középponti szög 360° − (60° + 45° +150°) = 105°, | 1 pont |  |
| az ehhez tartozó diákok száma: | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó megállapítja, hogy egy diákhoz 15°-os középponti szög tartozik. |
| vagyis közepes osztályzatot 7 diák szerzett. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**Magyar, mint idegen nyelv**

**II/14.** *Nekeresd város kórháza az alábbi adatokat hozta nyilvánosságra: a Nekeresden lakó 12 320 emberből az előző évben 1978 embert ápoltak hosszabb-rövidebb ideig a város kórházában.*

1. *Mekkora az esélye, hogy egy véletlenül kiválasztott nekeresdi lakost az előző évben a város kórházában ápoltak? Két tizedesjegyre kerekítve adja meg a valószínűséget!*

*Abban az évben a kórházban ápoltak közül 138 fő volt 18 év alatti, 633 fő 18 és 60 év közötti, a többi idősebb. A város lakosságának 24%-a 60 év feletti, 18%-a 18 év alatti. (A számítások során feltehetjük, hogy Nekeresden az ismertetett adatokban lényeges változás egy év alatt nem történt.)*

1. *Készítsen kördiagramot a kórházban ápoltak korosztály szerinti megoszlásáról! A diagram elkészítéséhez szükséges számításokat írja le!*
2. *Mennyivel kisebb vagy nagyobb az a)-ban kérdezett esély, ha a 60 év felettiek közül választunk ki valakit véletlenszerűen?*

*Megoldások:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár. |
|  | 1 pont |  |
| ≈ 0,16 | 1 pont | ≈16,06% |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| A 60 év feletti ápoltak száma:  1978−138 − 633 = 1207 fő. | 1 pont |  |
| A 18 év alatti 138 fő a kördiagramon megfelel o  ≈ -os középponti szögnek. | 1 pont | Ha a középponti szög kiszámításának helyes módszere egyszer sem jelenik meg, akkor jó adatok esetén is csak 1 pont jár.  Ha csak egy számítást részletez, de mindhárom adata jó, 2 pontot kapjon. |
| A 18 és 60 év közötti 633 fő a kördiagramon megfelel ≈ -os középponti szögnek. | 1 pont |
| A 60 év feletti 1207 fő a kördiagramon megfelel ≈ -os középponti szögnek. | 1 pont |
| A kördiagram helyes elkészítése (hozzávetőleges szögekkel, a körcikkek címkézésével). | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A Nekeresden élők között 12320⋅0,24 = | 1 pont |  |
| = 2956,8( ) ≈ 2957 fő 60 év feletti. | 1 pont | 2956 is elfogadható |
| A 60 év feletti és ápolásban részesülők száma 1207, így a keresett valószínűség: | 1 pont |  |
| A valószínűség 0,41− 0,16 = 0,25-dal emelkedett. | 1 pont |  |
| **Összesen*:*** | **4 pont** |  |

**II/16:** *Két ország sakkválogatottja, az A és a B csapat közös edzőtáborban készül egy világversenyre. Az első héten az azonos nemzetbeli sportolók játszanak körmérkőzéses bajnokságot, tehát minden egyes sportoló minden nemzetbelijével egy mérkőzést. Az A csapat 7 játékossal érkezett, a B csapatnál összesen 55 mérkőzés zajlott.*

1. *Hány mérkőzés zajlott az A csapatnál, és hány tagja van a B csapatnak?*

*A második héten az A csapat 6 kiválasztott tagjának mindegyike 8 B csapatbeli játékossal játszik egy-egy játszmát.*

1. *Összesen hány játszma zajlott a második héten?*

*Az edzőtáborozás végén a csapatok összes játékosa között négy egyforma ajándéktárgyat sorsolnak ki. Egy játékos legfeljebb egy ajándéktárgyat kaphat.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ajándékok közül egyet A csapatbeli játékos, hármat B csapatbeli játékosok kapjanak?*

*Megoldás:*

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A klasszikus valószínűségi modell alkalmazható.) | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár. |
| A nyerteseket  -féleképpen választhatjuk ki. | 1 pont |  |
| Az A csapat 7 tagjából 1-et 7-féleképpen | 1 pont | Ezek a pontok akkor is járnak, ha csak a kedvező esetek számát írja fel helyesen. |
| a B csapat 11 tagjából 3-at  -féleképpen választhatunk ki. | 1 pont |
| (A két kiválasztás egymástól független.) A kedvező esetek száma: 7 | 1 pont |
| A keresett valószínűség | 1 pont |  |
| ≈ 0,377 ≈ 38%. | 1 pont | A helyes valószínűség bármely alakban megadva 1 pontot ér. |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

**Emelt matematika**

**I/2.** *A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma  -szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.*

1. *Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!*

*Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai kö- zött három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).*

1. *Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai.*

*Megoldás:*

**B. első megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A lehetséges (egyenlően valószínű) kimenetelek száma: | 2 pont | Nem bontható. |
| A kedvező kimenetelek száma: | 2 pont |  |
| A kérdezett valószínűség: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**B. második megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az utalványok sorsolásának (a nyertesek sorrendjét is figyelembe véve) 20⋅19⋅18 (egyenlően valószínű) kimenetele van. | 2 pont | Nem bontható. |
| Először 20, majd 15, végül 10 főiskolásból kell kivá- lasztani 1-1 résztvevőt, ezek lehetséges száma:  20 ⋅15 ⋅10 . | 2 pont |  |
| a kérdezett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**II/8*.*** *Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.*

1. *Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!*

*A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.*

1. *Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!*

*A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.*

1. *Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az egyenlően valószínű kimenetelek száma: | 1 pont |  |
| A kedvező kimenetelek száma: | 2 pont |  |
| A kérdezett valószínűség: | 1 pont |  |
| ≈ 0,742. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül binomiális eloszlással számol, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat. Ha említi, hogy az így kapott eredmény közelítés, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat*

**B.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0,9 annak a valószínűsége, hogy az első gépsoron készült pohár jó. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| A kérdezett valószínűség | 2 pont |  |
| ≈ 0,267. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem a megfelelő modellt használja (például hipergeometrikus eloszlást használ), akkor erre a részre nem kaphat pontot.*

**C. első megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Jelölje A azt az eseményt, hogy az első gépsoron ké- szült a pohár, B pedig azt az eseményt, hogy selejtes a pohár. | 1 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
|  | 1 pont |
| P(AB) = 0,6⋅0,1 = 0,06 . | 1 pont |  |
| Ha összesen n darab pohár van, akkor  0,6⋅n⋅0,1+ 0,4⋅n⋅0,04 = 0,076n darab selejtes van közöttük. | 2\* pont |  |
| Egy selejtes választásának valószínűsége: | 1\* pont |  |
| Tehát | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

A \*-gal jelölt 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha jelöli azt az eseményt, hogy a második gépsoron készült a pohár, akkor | 1 |  |
| = 0,1⋅0,6 + 0,04⋅0,4 = 0,076. | 2 |  |

**C. második megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az n db elkészült pohár között 0,6n az első gépsoron és 0,4n a második gépsoron készült. | 2 pont |  |
| Az első gépsoron készült 0,6n pohár között a selejtesek száma 0,6n⋅0,1 = 0,06n , | 1 pont |  |
| a második gépsoron készült 0,4n pohár között a selejtesek száma 0,4n ⋅0,04 = 0,016n . | 1 pont |  |
| Az összes selejtes pohár száma tehát 0,076n | 1 pont |  |
| Ezek közül egyet választva  a valószínűsége annak, hogy az első gépsoron készült selejtes poharat választottunk. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

**Magyar, mint idegen nyelv**

**I/2,**

1. *Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, és a kapott számokat a dobás sorrendjében beírjuk a  hatjegyű számban az a és a b helyére. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott hatjegyű szám minden számjegye különböző?*
2. *Megadunk négy halmazt:   
   Az A halmaz elemei a héttel osztható pozitív kétjegyű számok.  
   A B halmaz elemei a 29 kétjegyű pozitív többszörösei.   
   A C halmaz elemei mindazok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 11-gyel nagyobb szám négyzetszám.  
   A D halmaz elemei mindazok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 13-mal kisebb szám négyzetszám.  
   b1) Hány elemű az A ∪ C halmaz?   
   b2) Hány elemű a B ∩ D halmaz?   
   b3) Melyek azok a kétjegyű pozitív egészek, amelyek a fenti négy halmaz közül pontosan kettőnek az elemei?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *2.a* | | |
| Kockával kétszer dobva 36-féleképpen lehetne (azonos valószínűséggel) a és b helyét kitölteni. | 1 pont |  |
| A dobás eredményei között csak az 1, a 2, a 3 és a 4 fordulhat elő. (Az a-t ezekből 4, a b-t már csak 3-féleképpen kaphatjuk,) | 1 pont |  |
| vagyis a kedvező kitöltések száma 3⋅ 4 = 12 . | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**II/8.** *Egy cég három városban nyitott fiókot. A kőszegi fiókban dolgozók átlagéletkora 37 év, a tatai fiókban dolgozóké 23 év, a füredi fiókban dolgozóké pedig 41 év.*

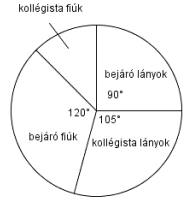
*Három alkalommal szerveztek tanulmányutat a cégnél. Ezeken az utakon csak a cégnél dolgozók vettek részt, és mindenki elment azokra a tanulmányi utakra, amelyekre beosztották. Az egyes utakra a két-két kijelölt fiók minden munkatársát beosztották.*

*Az első utat a kőszegi és a tatai fiók munkatársainak szervezték. Ezen az úton a résztvevők átlagéletkora 29 év volt. A második úton – amelyen a kőszegi és a füredi fiókban dolgozók vettek részt – a résztvevők átlagéletkora 39,5 év volt. A harmadik tanulmány- úton a tatai és a füredi fiók munkatársai vettek részt. Ezen az úton a résztvevők átlag- életkora 33 év volt. Mennyi az átlagéletkora a cég összes dolgozójának?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Legyen a kőszegi K csoport taglétszáma: k; a tatai T csoporté: t; míg a füredi F csoporté: f. Jelölje továbbá a K csoport tagjai életkorának összegét , T csoportét , míg az F csoportét | 2 pont | Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg |
| Ekkor a következő egyenleteket lehet felírni a megadott adatokkal: =37k | 1 pont |  |
| =23t | 1 pont |  |
| =41f | 1 pont |  |
| +=29(k+ t) | 1 pont | A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér. |
| +=39,5(k+ f ) | 1 pont |
| +=33(t+ f ) | 1 pont |
| Az első három összefüggést behelyettesítjük a következő három egyenletbe:  37k + 23t = 29(k + t) , azaz | 1 pont | A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér |
| 37k + 41f = 39,5(k + f ) , azaz | 1 pont |
| 23t + 41f = 33(t + f ), azaz | 1 pont |
| Az összes dolgozó átlagéletkora: | 1 pont | Ha a háromismeretlenes egyenletrendszerben egy konkrét számhármassal számolva helyes eredményt kap, de nem bizonyítja, hogy ugyanerre az eredményre jutna minden gyök esetén, 2 pontot veszít. |
| Ezekből t és f kifejezhető k segítségével, és akkor a következőt kapjuk a keresett átlagra: | 2 pont |
|  | 1 pont |
| A cég összes dolgozójának átlagéletkora 34 év | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **16 pont** |  |

**2012 október-november, magyar középszint**

**I/4.** *Egy középiskolának 480 tanulója van. A diákok egy része kollégiumban lakik, a többiek bejárók. A bejárók és a kollégisták nemek szerinti eloszlását mutatja a kördiagram. Adja meg a kollégista fiúk számát! Válaszát indokolja! *

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kollégista fiúk számát ábrázoló körcikkhez tartozó középponti szög 45°. | 1 pont |  |
| Ez a 360°-nak  része | 1 pont |  |
| A kollégista fiúk száma: 60. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**I/7:** *Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!*

1. *A valós számok halmazán értelmezett f (x) = 4 hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.*
2. *Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám.*
3. *Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének  -ben mért számértéke.*
4. *Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0.*

*Megoldás:*

**D***.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| hamis | 1 pont |  |

**II/14.**  *Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.*

1. *Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos?*
2. *Hányféle kétszínű kitűző készíthető?*

*A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.*

1. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű?*

*Megoldás:*

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kitűző minden mezőjét ötféleképpen színezhetjük ki, így összesen 5 ⋅ 5 ⋅ 5 = 125-féle színezés lehetséges. | 1 pont |  |
| A megadott három szín 3⋅ 2 ⋅1 = 6 kitűzőn szerepel. | 1 pont |  |
| A kérdéses valószínűség tehát : | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
|  | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**II/18:** *Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Életkor | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 31 |
| Gyakoriság | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |

1. *Számítsa ki a csapat átlagéletkorát!*

*Jelölje A azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.*

1. *Számítsa ki az A esemény valószínűségét!*

*A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:*

* *a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,*
* *a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,*
* *a hat játékos életkorának mediánja 23 év,*
* *a hat játékos életkorának átlaga 24 év.*

1. *Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az életkorok átlaga: | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt |
|  | 1 pont | Más, ésszerűen és helyesen kerekített érték (pl. 22 év) is elfogadható. |
| **Összesen:** | **2 pont** |  |

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A 13 játékosból 9 olyan van, aki 20 évnél idősebb, így) azoknak az eseteknek a száma, amikor nincs a kiválasztott 7 játékos között 20 évnél fiatalabb: | 1 pont |  |
| Azoknak az eseteknek a száma, amikor egy játékos 20 évnél fiatalabb (és 6 játékos 20 évnél idősebb): | 2 pont |  |
| Az A esemény bekövetkezése szempontjából kedvező esetek számát a fenti két szám összege adja: | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
| +=372 | 1 pont |  |
| Az összes esetszám: | 1 pont |  |
| A kérdéses valószínűség: | 1 pont |  |
|  | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **8 pont** |  |

**C**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A legidősebb és legfiatalabb játékos életkorának kü- lönbsége csak egyféleképpen lehet 12 év, ha) a legidősebb játékos 31, | 1 pont |  |
| a legfiatalabb játékos ( 19 éves | 1 pont |  |
| A móduszból következik, hogy a játékosok közül ketten ( és  ) 22 évesek | 1 pont |  |
| Mivel hat játékos van, ezért a medián  és  számtani közepe, azaz az egyik játékos 24 éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). | 2 pont |  |
| Az átlagból következik, hogy | 1 pont |  |
| vagyis ez a játékos  26 éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás és ellenőrzés nélkül adja meg a hat játékos életkorát helyesen, akkor 2 pontot kaphat (egy hiba esetén 1 pont jár, több hiba esetén nem jár pont). Ha ellenőrzi is, hogy a megadott adatok valóban megfelelnek a feladat feltételeinek, akkor további 3 pontot kaphat.*

**magyar emeltszint**

**I/1**

*Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.*

1. *Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?*
2. *Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?*
3. *Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)*

|  |  |
| --- | --- |
| sorsjegy(db) | nyeremény (Ft) |
| 4 | 10 000 000 |
| 40 | 50 000 |
| 800 | 10 000 |
| 150 000 | 1 000 |
| 400 000 | 500 |
| 1 000 000 | 200 |
| 3 449 156 | 0 |

*Megoldás:*

**B**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk.) A kedvező esetek száma 550 844, | 2 pont | Ha egyértelműen kiderül, hogy a vizsgázó jó szá- mokat adott össze, de számolási hibát vétett, akkor 1 pontot kaphat. |
| tehát a keresett valószínűség: | 2 pont | A 0,1 is elfogadható válasz. A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható. |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**C 1. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A felvehető nyeremény várható értéke: | 2 pont | nem bontható |
| = 120 (Ft) | 1 pont |  |
| A nyereség várható értéke tehát (120 – 200 =) –80 Ft | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**C 2. megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A sorsjegy kibocsátójának nyeresége a játékosok összes nyereségének ellentettje. | 2 pont |  |
| Egy játékos nyereségének várható értéke tehát | 1 pont |  |
| =-80 Ft | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**C 3. megoldás**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | nyeremény | nyereség | valószínűség | | 10 000 000 | 9 999 800 |  | | 50 000 | 49 800 |  | | 10 000 | 9 800 |  | | 1 000 | 800 |  | | 500 | 300 |  | | 200 | 0 |  | | 0 | -200 |  | | 2 pont | Egy hiba esetén 1 pont jár, egynél több hiba esetén nem jár pont. |
| A várható értéket az  képlet segítségével kiszámolhatjuk | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| A nyereség várható értéke –80 Ft. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**II/5**. *Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n 5, f-en pedig 4 különböző pontot.*

1. *Hány (e-től és f-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont kö- zül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?*
2. *A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?*

*Megoldás:*

**B. első megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az egyenlően valószínű színezések száma | 2 pont | Nem bontható. |
| Az e egyenesen és az f egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont, | 1 pont | Ha a csupa kék, illetve csupa piros pont eseteket nem tekinti, azaz két kedvező esettel számol, akkor itt csak 1 pontot kap. |
| tehát 4 „kedvező” színezés van. | 1 pont |
| A kérdezett valószínűség tehát: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**B. második megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az e egyenesen az első pont színe tetszőleges, a másik 4 pont színének ezzel megegyezőnek kell lennie, ennek valószínűsége minden pont esetén | 1 pont |  |
| összesen tehát | 1 pont |  |
| Ugyanilyen gondolatmenet alapján annak valószínűsége, hogy az f egyenesen levő pontok azonos színűek. | 1 pont |  |
| (Mivel az e és az f egyenes jó színezése egymástól független események,) a keresett valószínűség az előző két érték szorzata, | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| tehát: | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**II./7**. *Egy üzemben 4000 cm3 -es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)*

1. *Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak!*
2. *Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!*
3. *Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes?*

*Megoldás:*

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az 0,02 valószínűséggel selejtes lesz, tehát 0,98 valószínűséggel jó. | 1 pont | Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható: | 1 pont |
|  | 1 pont |  |
| ≈ 0,186 . | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

II/9.

1. *A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!* 
   1. *Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.*
   2. *Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.*
2. *Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?*

*Megoldás:*

**B.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. | 2 pont |  |
| Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú (esetleg nem összefüggő) komponense lenne, akkor legfeljebb  1 + 3 = 4 éle lehetne. | 2 pont |  |
| Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. | 2 pont |  |
| Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van, | 1 pont |  |
| ezek közül -féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. | 2 pont |  |
| A keresett valószínűség tehát | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **10 pont** |  |

**2013. május-június magyar középszint**

**I/2**. *Egy kis cégnél nyolcan dolgoznak: hat beosztott és két főnök. A főnökök átlagos havi jövedelme 190 000 Ft, a beosztottaké 150 000 Ft. Hány forint a cég nyolc dolgozójának átlagos havi jövedelme?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az átlagos jövedelem 160 000 Ft. | 2 pont |  |
| **Összesen:** | **2 pont** |  |

**I/11**. *Réka év végi bizonyítványában a következő osztályzatok szerepelnek:  
 4; 2; 3; 5; 5; 4; 5; 5; 4.  
 Adja meg Réka osztályzatainak móduszát és mediánját!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A módusz 5, | 1 pont |  |
| a medián 4. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **2 pont** |  |

**I/12**. *Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím!*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kérdezett valószínűség | 2 pont |  |
| **Összesen:** | **2 pont** |  |

**II/16** *Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.*

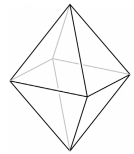
1. *Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!*
2. *Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!)*
3. *Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket!*

*Megoldás:*

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. | 2 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
| Összesen  mérkőzés szükséges (összes eset száma). | 2 pont |  |
| Eddig 8 mérkőzés zajlott le | 1 pont |  |
| tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség: | 1 pont | Százalékban megadott helyes válasz is elfogadható. |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

**II/18**. *Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.*

1. *Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm2 -ben) és a térfogatát (cm3 -ben)!  
    Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!*

*A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert” kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó- oktaéderrel” 8-ast dobtunk.)*

1. *Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó- oktaéderrel” egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk!*

*Megoldás:*

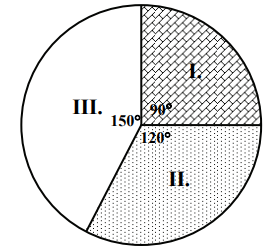
**B. első megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az összes (egyenlően valószínű) eset száma | 1 pont |  |
| 5-nél többet dobni háromféleképpen lehet (6, 7, 8). | 1 pont |  |
| Az olyan esetek száma, amelyben mind a négy dobás 5-nél nagyobb | 1 pont |  |
| Pontosan három 5-nél nagyobb dobás úgy lehetséges, hogy a négy dobás közül az egyik nem ilyen. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt. |
| Az ilyen esetek száma: 4⋅(3⋅3⋅3⋅5)(= 540). | 2 pont | Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon. |
| A kedvező esetek száma 81 + 540 = 621. | 1 pont |  |
| A kérdezett valószínűség | 1 pont | Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont. |
| **Összesen:** | **8 pont** |  |

**B. második megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P(egy adott dobás 5-nél nagyobb) = | 2 pont |  |
| P(mind a négy dobás nagyobb 5-nél) = | 1 pont |  |
| P(három dobás nagyobb 5-nél, egy nem) = | 2 pont | Ha a vizsgázó egyetlen hibája, hogy nem szoroz 4-gyel, akkor 1 pontot kapjon |
| A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz | 1 pont |  |
| ≈ 0,152. | 2 pont | Százalékban megadott helyes válaszért is jár ez a pont |
| **Összesen:** | **8 pont** |  |

**magyar, mint idegen nyelv, középszint**

**I/9.** *Az ábrán látható kördiagram 720 megkérdezett személy internetezési szokásait szemlélteti: I.nem internetezők; II. rendszeresen internetezők; III. ritkán internetezők. Hányan tartoznak a megkérdezettek közül az egyes csoportokba?*

Megoldás:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| I.csoport 180 személy, II. csoport 240 személy,  III. csoport300 személy. | 1-1 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**II/15**. *Egy kutatólaboratóriumban technikusi végzettséggel vagy egyetemi diplomával lehet dolgozni. A laborban dolgozó 50 ember közül 42 főnek van technikusi oklevele és 28 főnek van egyetemi diplomája.*

1. *Közülük hány dolgozónak van csak technikusi végzettsége?*

*A labor 50 dolgozójának átlagkeresete 165 000 forint. Közülük a 30 év alattiak átlagkeresete 148 000 forint, a többieké 173 000 forint.*

1. *Hány 30 év alatti dolgozója van a labornak?*

*A hétvégén megrendezésre kerülő konferenciára 25 kutató szeretne elmenni, közülük 17 nő és 8 férfi. A kutatóintézet a 25 jelentkező 20%-ának tudja csak a részvételi díját kifizetni.*

1. *Ha a vezetőség véletlenszerűen választaná ki, hogy kinek a költségeit fizeti, mekkora lenne a valószínűsége annak, hogy csak nőket választanak ki? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!*

*Megoldás:*

**B.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha a 30 év alatti dolgozók száma x, | 1 pont | Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár. |
| akkor az átlag: | 1 pont |  |
| x =16 | 1 pont |  |
| A laborban 16 dolgozó 30 év alatti. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 dolgozó költségeit fizetik. | 1 pont |  |
| Az összes eset | 1 pont |  |
| a kedvező esetek száma: | 1 pont |  |
| (Alkalmazva a klasszikus valószínűség modelljét: | 1 pont |  |
| 0,12 (illetve 11,65%) a valószínűsége annak, hogy 5 nőt választanak ki. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **5 pont** |  |

**II/18** *Egy élelmiszerbolt vezetője az árufeltöltőt azzal bízta meg, hogy a bejárat melletti alsó polcon lévő 6 rekeszt töltse fel a következő árucikkekkel: rizs, cukor, liszt, só, búzadara és zsemlemorzsa. A vezető figyelmeztette az árufeltöltőt, hogy minden rekeszbe egyféle árut tegyen, továbbá, hogy a búzadara és a zsemlemorzsa ne kerüljön egymás melletti rekeszbe, mert az új csomagolásuk nagyon hasonló, ezért könnyen összekeverhetők. Egyébként a hatféle árut bármilyen sorrendben kirakhatja.*

1. *Hányféle sorrendben rendezhette el az árufeltöltő ezt a hatféle árut?*

*Az üzletvezető úgy kötött szerződést egy sütödével, hogy minden este zárás után megmondja, hogy mennyi kenyeret és mennyi péksüteményt kér másnapra. Minden alkalommal háromféle kenyeret (1 kg-os fehér kenyér, ½ kg-os fehér kenyér, rozskenyér) és kétféle péksüteményt (zsemle és kifli) rendelt. A 32. héten öt munkanapon keresztül (hétfőtől péntekig) feljegyezte, hogy a megrendelt pékáruból mennyi fogyott el, és mennyi maradt meg, amit vissza kellett küldenie. Az alábbi táblázatban az egyes napokról készült kimutatás látható:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Pékáru, darabszáma | 1.nap | | 2.nap | | 3.nap | | 4.nap | | 5.nap | |
|  | eladott | vissza-küldött | eladott | vissza-küldött | eladott | vissza-küldött | eladott | vissza-küldött | eladott | vissza-küldött |
| 1 kg-os fehér kenyér | 32 | 6 | 28 | 4 | 30 | 4 | 29 | 5 | 36 | 2 |
| 1/2 kg-os fehér kenyér | 19 | 1 | 20 | 4 | 18 | 2 | 20 | 5 | 18 | 2 |
| rozskenyér | 7 | 3 | 6 | 1 | 6 | 2 | 6 | 0 | 8 | 1 |
| zsemle | 56 | 4 | 58 | 2 | 58 | 6 | 54 | 6 | 68 | 2 |
| kifli | 68 | 2 | 75 | 0 | 74 | 6 | 68 | 3 | 82 | 3 |

1. *Számítsa ki, hogy az üzletvezető az 5 nap alatt összesen hány darab kenyeret, illetve péksüteményt rendelt, és a megrendelt mennyiségnek hány százalékát küldte vissza a két árufajta esetén!*
2. *Az 5 napból véletlenszerűen megjelölünk 2 napot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két olyan napot jelölünk meg, amikor mindkét napon legalább 130 péksüteményt adtak el?*

*Az egyes pékárukból a következő, 33. hét minden napján ugyanannyit rendelt a kereskedő, mégpedig mindhárom fajta kenyérből a 32. héten naponta eladott mennyiségeiknek egészre kerekített átlagát, zsemléből és kifliből pedig a 32. héten eladott mennyiségek móduszát.*

1. *Mennyit rendelt ekkor naponta az egyes pékárukból?*

*Megoldás:*  
  
**B.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Összesen 325 (=176+109+40) db kenyeret rendeltek és 42 db-ot küldtek vissza, | 1 pont |  |
| ez a megrendelt mennyiség 12,9%-a. | 1 pont |  |
| Összesen 695 (=314+381) péksüteményt rendeltek és 34 db-ot küldtek vissza, | 1 pont |  |
| ez a megrendelt mennyiség 4,9%-a. | 1 pont |  |
| **Összes:** | **4 pont** |  |

C.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az egyes napokon eladott péksütemények száma: 124; 133; 132; 122; 150 db | 1 pont |  |
| A két napot  féleképpen jelölhetjük meg. | 1 pont |  |
| (3 napon adtak el legalább 130 db-ot.) -féle kiválasztása lehet a kívánt 2 napnak, | 1 pont |  |
| így a keresett valószínűség : | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**D**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 kg-os fehér kenyérből  31 darabot ½ kg-os fehér kenyérből 19 darabot rozskenyérből  7 darabot | 2 pont | Két helyes válasz 1 pont, egy helyes válaszért nem jár pont. |
| zsemléből 58, kifliből 68 db-ot rendeltek. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**magyar nyelv, emelt szint**

**II/7.:***Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000  . A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2  , míg oldalának anyagköltsége 0,1 .*

1. *Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!*

*A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.*

1. *Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!*

*Megoldás:*

**B**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az adatok átlaga 0,7. | 1 pont |  |
| A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése | 2 pont |  |
| **Összesen:** | **3 pont** |  |

**II/8*.***  *Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.*

1. *Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!*

*A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.*

1. *Hányféle különböző színösszeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni?*

*A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra. Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: 0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes*

1. *Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András?*

*Megoldás:*

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes, | 1 pont |  |
| Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes, | 1 pont |  |
| Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes, kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99. | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| Megoldandó a  egyenlőtlenség (n∈**N**) | 1 pont |  |
| (Az lg x függvény szigorúan monoton növekedése miatt) | 1 pont |  |
| Ebből (lg 0,99998 < 0 miatt) | 1 pont |  |
| tehát András legfeljebb 502 darabos készletet vehet. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **7 pont** |  |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat (egyenlet felírása 3 pont, jó megoldása 1 pont, jó válasz 1 pont).*

**II/9.** *Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.*

1. *Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?*
2. *Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk?*
3. *A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal?*

*Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!*

*Megoldás:*

**A**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Az összes kihúzási lehetőségek száma | 1 pont |  |
| Három sárga golyót  -féleképpen, három zöld golyót  -féleképpen húzhatunk ki, | 1 pont |  |
| a kedvező esetek száma így | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**B. első megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sárga golyó húzásának valószínűsége   zöld golyó húzásának valószínűsége | 1 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki. |
| A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ, | 1 pont |
| ezért | 1 pont |  |
| ≈ 0,292. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**B. második megoldás**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (Mivel minden egyes húzás alkalmával mind a 17 golyót húzhatjuk, ezért) az összes esetek száma | 1 pont |  |
| Mivel három sárga golyó húzására  , két zöld golyó húzására  lehetőségünk van, a golyók kihúzásának színsorrendje pedig  -féle lehet, | 1 pont | Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| ezért a kedvező esetek száma: | 1 pont |  |
| A keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **4 pont** |  |

**C.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, | 1 pont | Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki. |
| vagy 3-as maradékaik páronként különbözők. | 1 pont |
| 0 maradékot a 3, 6, 9, 12, 15 számok adnak, közülük három szám húzása )  -féleképpen lehetséges. | 1 pont |  |
| 1 maradékot az 1, 4, 7, 10, 13, 16 számok adnak, közülük három szám húzása  -féleképpen lehetséges. | 1 pont |  |
| 2 maradékot a 2, 5, 8, 11, 14, 17 számok adnak, közülük három szám húzása  -féleképpen lehetséges. | 1 pont |  |
| A páronként különböző maradékot adó húzások szá- ma | 1 pont |  |
| A kedvező esetek száma: | 1 pont |  |
| Mivel az összes esetek száma  ezért a keresett valószínűség | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **8 pont** |  |

*Megjegyzések:*

*1. Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a teljes feladatban összesen 1 pontot veszítsen.*

*2. Százalékban megadott helyes válaszok is elfogadhatók.*

*3. Ha a vizsgázó megoldásában rossz modellt használ (a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavételt felcseréli), akkor az a) és b) feladatokban 0 pontot, a c) feladatban legfeljebb 4 pontot kaphat.*

**emelt szint, magyar, mint idegen nyelv**

**II/7.** *Egy mobiltelefon-szolgáltató társaság több évi statisztikája azt mutatja, hogy a szabályosan elküldött SMS-ek (szöveges telefonüzenetek) közül átlagosan minden hatvanadik nem jut el a címzettjéhez. A következőkben ezen szolgáltató által továbbított SMS-ekről lesz szó.*

1. *Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve melyik hamis! Tegyen a megfelelő mezőbe egy ×-et! ( A válaszokhoz indoklás nem kell.)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Állítás | Igaz | Hamis |
| 1 | Ha egy hónap alatt 45 SMS-t küldünk, akkor biztos, hogy mindegyik megérkezik a címzettjéhez. |  |  |
| 2 | Ha minden SMS-t kétszer küldünk el, akkor legalább az egyik üzenet biztosan megérkezik mindegyik párból. |  |  |
| 3 | Lehetséges, hogy a tegnap elküldött 5 SMS-ből csak egy jutott el a címzetthez. |  |  |
| 4 | Ha tíz nap alatt 120 SMS-t küldünk, akkor lehet, hogy mindegyik megérkezik a címzettjéhez. |  |  |
| 5 | Ha két nap alatt 180 SMS-t küldtünk, akkor közülük három biztosan nem érkezett meg. |  |  |

*A továbbiakban feltételezzük, hogy a sikeresen elküldött SMS-ek száma binomiális eloszlást követ.*

1. *Mekkora a valószínűsége annak, hogy három elküldött SMS-ből pontosan egy nem érkezik meg?*

*Ha számításaihoz kerekített értékeket használ, akkor 4 tizedes jegyre kerekített alakjukkal számoljon!*

1. *Legalább hány SMS elküldése esetén mondhatjuk, hogy legalább 98% a valószínűsége annak, hogy közülük legalább egy nem érkezett meg?*

*Ha számításaihoz kerekített értékeket használ, akkor 4 tizedes jegyre kerekített alakjukkal számoljon!*

*Megoldás:*

**B**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A statisztika szerint egy elküldött SMS  , azaz körülbelül 0,0167 valószínűséggel nem érkezik meg, | 1 pont | Ezt a 2 pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha ez a gondolat csak a megoldásából és így 1–0,0167=0,9833 valószínűséggel megérkezik olvasható ki. |
| és így 1–0,0167=0,9833 valószínűséggel megérkezik a címzetthez. | 1 pont |
| Annak a valószínűsége, hogy 3 darab SMS közül pontosan 1 nem érkezik meg : | 1 pont | Ha a binomiális együttható hiányzik, vagy hibás, akkor az utolsó két pontból legfeljebb 1-et kaphat. |
| ami közelítőleg 0,0484 (azaz 4,84%). | 1 pont |
| **Összesen:** | **4 pont** | Ha  -dal és  -dal számol, akkor  ≈0,0483 adódik. |

**C**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ha n darab SMS-t küldünk, akkor annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike megérkezik: | 1 pont |  |
| Ezért  valószínűséggel legalább egy SMS nem érkezik meg. | 1 pont | 2 pont jár a következő megállapításért: Legfeljebb 2 % annak a valószínűsége, hogy mindegyik SMS megérkezik a címzettjéhez. |
| Azt a legkisebb n természetes számot keressük, amelyekre: | 1 pont |
| Rendezve: | 1 pont |  |
| Ebből  (mert az 1-nél kisebb alapú logaritmusfüggvények szigorúan monoton csökkenők), | 1 pont |  |
| n ≥ 232,3 . | 1 pont | számol, akkor n ≥ 232,8- at kap az egyenlőtlenség megoldásaként. |
| Tehát, ha legalább 233 SMS-t küldünk, akkor legalább 0,98 annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább 1 nem érkezik meg a címzettjéhez. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **7 pont** | Ha egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja azt, hogy a legkisebb értéket kapta meg (pl. monotonitásra való hivatkozással), akkor a c) rész megoldására legfeljebb 4 pontot kaphat. |

**II/9**. *András a gimnázium kosárlabdacsapatának legeredményesebb tagja. A tízfordulós középiskolai bajnokságban a hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik fordulóban rendre 23, 14, 11 és 20 pontot dobott. A kilencedik forduló után András pontátlaga nagyobb volt, mint az első öt forduló utáni pontátlaga. A bajnokság végén kiderült, hogy a tíz meccs során átlagosan legalább 18 pontot dobott meccsenként. Legkevesebb hány pontot dobott András a bajnokság tizedik fordulójában?*

*Megoldás:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A bajnokság első felében, (az első öt mérkőzésen) az András által dobott pontok átlaga legyen a. Az első öt fordulóban összesen dobott pontok száma így: 5a. | 2 pont |  |
| A hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik mérkőzésen András összesen 23 +14 +11+ 20 = 68 pontot dobott. | 1 pont |  |
| A kilencedik forduló utáni pontátlag:  . | 1 pont |  |
| A feltétel alapján ez az átlag nagyobb, mint az első öt mérkőzésen dobott átlag, | 1 pont |  |
| azaz | 1 pont |  |
| ahonnan a < 17 | 2 pont |  |
| A tizedik mérkőzésen András által dobott pontok száma legyen x. A bajnokság végén András mérkőzésenkénti pontátlaga: | 2 pont |  |
| A feltétel alapján: | 1 pont |  |
| azaz 5a + 68+ x ≥ 180, | 1 pont |  |
| ahonnan x ≥112 − 5a . | 1 pont |  |
| Mivel a < 17,  x ≥ 112−5a > 112−5⋅17 = 112−85 = 27 . | 2 pont |  |
| Mivel x > 27 , ezért Andrásnak legalább 28 pontot kellett dobnia az utolsó fordulóban. | 1 pont |  |
| **Összesen:** | **16 pont** |  |