Elemi feladatsorok; 2G

1. Hányféle végeredménye lehet egy olyan futóversenynek, melyen 90-en vesznek részt és az első öt helyezést rögzítik?

2. Hányféle lottóhúzás lehetséges az ötös lottón (ahol az első 90 szám közül húznak 5-öt)?

3. Ha minden lehetséges módon töltesz ki szelvényt, hány hármasod lesz?

4. Minden hányadik embernek ugyanaz a bankkártya- PIN-kódja?

5. Hány autónak kell forgalomban lennie Magyarországon, hogy új rendszámtábla rendszert kelljen bevezetni?

6. Egy száz elemű halmaz részhalmazrendszere *lánc*, ha az első egy elemű, a második két elemű és tartalmazza az előzőt, a harmadik három elemű és tartalmazza az előzőt s.t.b. az utolsó láncszem száz elemű. Hány ilyen részhalmazrendszer létezik? Hány olyan van, melynek egyik láncszeme a 30 alatti prímszámok halmaza?

7. Három dobókockával dobunk. Hány lehetséges olyan kimenetel van, melyben nincs két egyforma dobás? Mi a helyzet 5 kocka esetén? 7 kocka esetén?

8. Hány ötbetűs - nem feltétlenül értelmes - szó állítható össze két A és három B betű felhasználásával?

9. Hány ötbetűs szó állítható össze az A és a B betű felhasználásával?

10. Az $1, 2, 3, 4, 5$ és a 6 számokból hatjegyű számokat készítünk. Hány hattal osztható lesz közöttük? (Minden számot csak egyszer használhatunk fel).

11. A sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a jobbra vagy felefelé egy lépést tevő bábú?

12. Egy sakktáblára nyolc bástyát akarunk úgy elhelyezni, hogy egyik se üsse a másikat. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

13. Miklós észrevette, ha az iskola húsz lépcsőjén úgy rohan fel, hogy négyszer három lépcsőfokot, négyszer két lépcsőfokot ugrik, akkor aznap nem felel. Hány napig úszhatja meg Miklós a felelést, ha egy változat csak egyszer hat?

14. Egy teszt tíz kérdésből áll, minden kérdésnél három lehetőséget adnak meg (amiből csak egy helyes). Hányféle módon tölthető ki a teszt?

15. Az előző feladatban mi az esélye annak, hogy véletlenszerűen kitöltve a tesztet 80 százalékos eredményt érünk el?

16. Egy szabályos tetraédernek az egyik lapja fehér, a többi fekete. Ötször elgurítva, mekkora annak az esélye, hogy legalább háromszor látható lesz ez a fehér lap?

17. A számegyenes nulla pontjában állunk. Pénzfeldobással döntjük el, hogy pozitív vagy negatív irányban lépünk 1 egységnyit. Tíz dobás után mekkora annak az esélye, hogy újra az origóban állunk?

18. Csaba nagypapája minden csütörtökön 7 süteményt vásárol abban a cukrászdában, ahol lúdlábat, dobostortát és képviselőfánkot árulnak (mást nem). Csaba azt szeretné, ha két lúdlábat, három dobostortát és két képviselőfánkot kapna. Mekkora az esélye, hogy teljesül a kívánsága?

Leszámlálós feladatok

19. Mikor lehet lefedni egy $m \times n$-es sakktáblát 1×2 dominókkal átfedésmentesen?

20. Egy csonkított sakktábla 5 fehér és 5 fekete kockát tartalmaz. Biztosan lefedhető 1×2-es dominókkal? Csonkított egy sakktábla, ha néhány mező elhagyásával megkapható a 8×8-as sakktáblánkból úgy, hogy a megmaradt tábla nem áll több darabból, vagyis összefüggő.

21. A 8×8-as sakktábla két átlós kockáját (tehát $a1$-et és $h8$-ast) kivágjuk. Lefedhető 1×2-es dominókkal?

22. Hányféle módon fedhető le egy $2 \times n$-es sakktábla 1×2-es dominókkal átfedésmentesen?

23. Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, továbbá nem egyenlő szárú, és mindegyik szöge fokokban mérve egész számot ad?

24. Nevezzük *E-Cantor halmaz*nak az olyan természetes számokat tartalmazó halmazt, amely elemei a 3-as számrendszerben csak a 0-t és a 2-es számjegyet tartalmazzák. Becsüljük meg, hogy N-ig hány eleme van ennek a halmaznak!

25. Egy (számozott) N pontú gráf minden élét két szín (piros, kék) egyikével megszínezzük. Hányféle módon tehetjük ezt meg?

26. Hány olyan színezés van az előzőek közül, melyben az $1, 2, 4, \ldots, 1024$ pontok alkotta teljes részgráf élei egyszínűek? ($N > 1023$)

27. Igazoljuk, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$$
($n \in \mathbb{N};\ i \in \mathbb{N}$.)

28. Igazoljuk, hogy
$$\binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = k^2,$$
ha $k \in \mathbb{N}$.

29. Az előző két feladat segítségével adjuk meg zárt alakban az

$$1^2 + 2^2 + \dots n^2$$

összeget!

30. Készítsünk n^2 elemből álló olyan számsorozatot, melyben nincs n-nél hosszabb monoton részsorozat!

31. Mutassuk meg, hogy egy 5 tagú valós számsorozat elemei közül kiválasztható egy 3 tagú monoton részsorozat!

Kombinatorika a geometriában

32. Egy kör kerületén adott 2000 olyan pont, melyek között nincs kettő, amelyik egy átmérőn feküdne. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan átmérő, amelyik kettő egyenlő méretű ponthalmazra osztja a megadott pontokat.

33. Mutassuk meg, hogy egy konvex sokszög két egyenlő területű részre bontható

    a.) adott irányú egyenessel

    b.) adott ponton átmenő egyenessel!

34. Bizonyítsuk be, hogy a sík pontjait két színnel színezve van két olyan azonos színű pont, melyek távolsága π!

35. * Bizonyítsuk be, hogy a sík pontjait három színnel színezve van két olyan azonos színű pont, melyek távolsága 1!

36. Bizonyítsuk be, hogy a sík pontjait ki lehet színezni hét színnel úgy, hogy nincs két azonos színű pont, melyek távolsága 1!

37. * Igazoljuk, hogy a tér pontjait két színnel színezve, található olyan szabályos háromszög a térben, melyek csúcsai azonos színűek, és oldalaik 1 hosszúságúak!

38. Adott öt általános helyzetű pont a síkon, (vagyis nincs közöttük három egy egyenesen). Igazoljuk, hogy ekkor kiválasztható közülük négy, melyek egy konvex négyszög csúcsait alkotják!

39. Adott öt általános helyzetű pont a síkon. Igazoljuk, hogy ekkor kiválasztható közülük három, melyek egy tompaszögű háromszög csúcsait alkotják!

40. Igazoljuk, hogy egy adott ellipszis belsejében fekvő tetszőleges P ponton keresztül húzható olyan húr, melyet a P pont felez!

41. Adott $n \geq 5$ általános helyzetű pont a síkon. Igazoljuk, hogy ekkor kiválasztható közülük legalább $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$-féleképpen 4, melyek egy konvex négyszög csúcsait alkotják.

42. Adott véges sok pont a síkon. Kössük össze bármely kettőt egy egyenessel és rendeljük hozzá az ehhez az egyeneshez a hozzá legközelebb eső pontot az adott pontok közül - ami nem illeszkedik az egyenesre. Jelölje d_e minden egyes ilyen e egyenesnek a legközelebbi ponttól vett távolságát. Bizonyítsuk be, hogy ha a legkisebb ilyen távolságra $d_e > 0$, akkor az e egyenesen pontosan két pont van az adott pontok közül!

43. Adott egy véges sok pontú ponthalmaz a síkon. Bizonyítsuk be, hogy ha bármely kettő pontot összekötő egyenesen van egy harmadik pont a ponthalmazunkban, akkor minden pont egy egyenesre illeszkedik!

44. Igaz-e az előző feladat úgy is, ha a ponthalmaz végtelen sok pontból áll?

Kombinatorika a számelméletben

45. Hány 3-tagú számtani sorozat van, melynek elemei N-nál nem nagyobb pozitív egészek?

46. Hány k-tagú számtani sorozat van, melynek elemei N-nál nem nagyobb pozitív egészek?

47. Az $1, 2, \ldots, 9$ számokat két színnel megszíneztük. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan nem-konstans 3-tagú számtani sorozat, melynek minden eleme azonos színű!

48. Adott $n + 1$ olyan n-dimenziós vektor, melynek koordinátái 0 vagy 1 ($n > 3$). A következő (mod 2) összeadás van érvényben: két vektor ilyen összegében az azonos helyen álló koordinátakat a $0+0 = 0$; $0+1 = 1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 0$ szabály szerint adjuk össze. (Bináris, $\mathbb{Z}_2$-beli összeadás.) Bizonyítsuk be, hogy az $n + 1$ vektor közül kiválasztható néhány, melyek összege a $(0, 0, \ldots, 0)$ vektort adja!

49. Adott öt szám, melyeknek nincs 10-nél nagyobb prímosztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány, melyek szorzata egy négyzetszám!

50. Igazoljuk, hogy öt egész szám közül mindig kiválasztható három, melyek összege osztható hárommal!

51. Igaz-e, hogy $2n - 2$ egész szám közül mindig kiválasztható n, melyek összege osztható n-nel?

52. Igazoljuk, hogy ha $2n$-ig megadunk $n+1$ számot, akkor a számok között lesz két olyan, melyek egymáshoz relatív prím számok! Igaz-e az állítás $n + 1$ helyett n-re?

53. Igazoljuk, hogy ha $2n$-ig megadunk $n+1$ számot, akkor a számok között lesz két olyan, melyek közül az egyik osztja a másikat! Igaz-e az állítás $n + 1$ helyett n-re?

Gráfelmélet

54. Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságban mindig található három ember, akik páronként ismerik egymást, vagy három olyan ember, akik páronként nem ismerik egymást! (Az ismeretség kölcsönös.)

55. Igaz-e az előző állítás, ha a társaság öttagú?

56. Bizonyítsuk be, hogy egy hat pontú gráf éleit pirossal/kékkel színezve van két olyan háromszög, melyek élei azonos színűek! (A két háromszög színe persze lehet különböző!)

57. Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám között mindig van három, melyek közül bármely kettő összege irracionális.

58. Bizonyítsuk be, hogy egy hat pontú gráf éleit pirossal/kékkel színezve van a gráfban egyszínű négy hosszúságú kör!

59. Bizonyítsuk be, hogy egy 17 pontú gráf éleit pirossal/kékkel/zölddel színezve van olyan háromszög, melynek élei azonos színűek!

60. Egy dél-amerikai indián törzsben minden évben a következőképpen választanak főnököt: mindenki mindenkivel meskát (egy logikai játékot) játszik. Az lehet az adott évben főnökjelölt, aki a törzs többi tagját vagy legyőzte, vagy akitől kikapott, az vereséget szenvedett valaki olyantól, akit a főnökjelölt legyőzött.

    Bizonyítsuk be, hogy minden évben tudnak főnököt választani, vagyis mindig van legalább 1 főnökjelölt!

61. Bizonyítsuk be, hogy egy tenisz körmérkőzés résztvevőit sorba lehet úgy állítani, hogy mindenki mögött közvetlenül olyan álljon, akit legyőzött!

62. Egy 78 tagú társaságban mindenki legalább öt embert ismer. A társaságot hat személyes asztalokhoz ültetik. Bizonyítsuk be, hogy van olyan ültetés, amelyben legalább egy asztalnál mindenki ismeri a közvetlen mellette ülőt! (Ismeretség kölcsönös)

63. Egy gráfban nincsen kör. Lássuk be hogy ekkor a gráfban van elsőfokú pont!

64. Egy bélyeggyűjtő bulin öt házaspár van. Az egyik férj mindenkit – még a saját feleségét is – megkérdezi, hány embert nem ismer. Csupa különböző választ kap. Mennyit mondott a feleség? (Az ismeretség kölcsönös.)

65. Egy 5 tagú csoportban bármely 4 ember közül 3 ismeri egymást. Bizonyítsuk be, hogy létezik a társaságban 4 ember is, akik kölcsönösen ismerik egymást!

66. A kémiában alkánoknak nevezik a metánt, etánt, ... azokat a vegyületeket, melyek a C_nH_{2n+2} képlettel írhatóak le. Ismert, hogy a szénnek 4, a hidrogénnek 1 a vegyértéke. Adjuk meg azt a legkisebb $n-$et melyre kétféle alkán (izomer) is létezik!

67. Tegyük fel, hogy egy n pontú gráfban több mint $\frac{n^2}{4}$ él van. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van háromszög!

68. Induljon ki a sík egy pontjából $2n$ félegyenes. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet több, mint n^2 olyan pár, melyek szöge nagyobb mint $120°$!

69. Egy ország minden városát vagy busz- vagy vasútvonal köti össze. Bizonyítsuk be, hogy az ország bejárható vagy busszal vagy vasúttal!

Skatulyaelv

70. Bizonyítsuk be, hogy öt egymást követő egész számot két színnel színezve, e számokból kiválasztható egy 3-tagú számtani sorozat, melynek első két tagja azonos színű!

71. Bizonyítsuk be, hogy hét egymást követő egész számot három színnel színezve, e számokból kiválasztható egy 3-tagú számtani sorozat, melynek első két tagja azonos színű!

72. Bizonyítsuk be, hogy Budapesten van két olyan (nem kopasz) ember, akinek ugyanannyi hajszála van!

73. Hány embernek kell élnie egy kontinensen, hogy biztosan legyen közöttük kettő, akiknek a fogazata pontosan ugyanolyan?

74. Egységsugarú körlapra 7 pontot helyeztünk el. Igazoljuk, hogy van kettő közöttük, melyek távolsága nem nagyobb, mint 1.

75. Adott a síkon végtelen sok pont. Bizonyítsuk be, hogy közöttük végtelen sok távolság lép fel!

76. A 8×8-as sakktáblán egy négyzetet két szomszédos oldalára támaszkodó két négyzettel L alaknak hívunk (pl. a2,b2,b1 L alak). E sakktáblára 31 bábút helyezve igazoljuk, hogy lesz olyan L alak, melyen nem áll bábú!

77. Egy 8×8cm-es négyzetbe 33 pontot elhelyezve lesz három pont melyek egy $2cm^2$ nem nagyobb területű háromszöget határoznak meg.

78. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex poliédernek van két olyan lapja amely lapokon az oldalak száma egyenlő!

79. Bizonyítsuk be, hogy n egész számból mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható $n-1$-gyel!

80. Bizonyítsuk be, hogy bármely n egész szám közül kiválasztható néhány (vagyis legalább 1), melyek összege osztható n-nel!

81. Egy forgalmas helyen a bankautomatát átlagosan két percenként használják az ügyfelek reggel hat és este hat között. Igaz-e, hogy bármely hónapban van két olyan alkalom, hogy ugyanazt a PIN-kódot ütik be a gépbe?

82. Bizonyítsuk be, hogy bármely ötnél nagyobb prímszámnak van olyan többszöröse, aminek minden számjegye egyes!

83. Legfeljebb hány prímszámot adhatunk meg, melyek közül bármely három összege ugyancsak prím? Adjunk is meg példát!

84. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat utolsó három számjegyéből alkotott számok sorozata valahonnan kezdve periódikus!

85. Legyen p prímszám, és vegyük a négyzetes maradékok M halmazát. (Azok a négyzetes maradékok, melyek a négyzetszámok p-vel osztási maradékai. Pl. $p = 7$ esetén ezek $0, 1, 2, 4$.) Bizonyítsuk be, hogy minden $0, 1, \ldots, p-1$ maradék két (nem feltétlen különböző) négyzetes maradék összege! (Pl. $p = 7$ esetén az 1 maradék a $4 + 4$.)

Néhány egyszerűbb kombinatorikus algoritmussal kapcsolatos feladat

86. Egy tornasorban 65 gyerek áll. Lehet-e a 66. gyereket 6 összehasonlítással a tornasorba illeszteni?

87. Egy $p(x)$ polinomra $p(0) = -2,4$ és $p(1) = 0,5$. Lehet-e kilenc lépésben 1/1000 pontossággal megállapítani a(z egyik) gyökét?

88. Karácsony előtt egy bevásárlóközpontban olyan sokat vásároltunk, hogy a számla hossza $1,2$m lett. Az erszényünkbe 10cm-es vagy annál rövidebb számlát tudunk elrakni. Hány összehajtással lehet a számlát elrakni? Elemezzük a feladatot abból a szempontból, hogy milyen középiskolai fogalmat tudunk így motiválni!

89. Lehet-e 6 szorzás segítségével x^{48}-t kiszámítani, ha x adott? Mi lenne az általános módszer? (Ami nem a legjobb.)

90. Lerajzoltunk vízszintesen egy vasúti sínpárt és két – rá merőleges – leágazást. Jobbról négy vagon, $1, 2, 3, 4$ jelű érkezik. A vízszintes vonalon csak jobbról balra, a leágazásokon föl- és lemozoghatnak a vagonok. Van-e olyan eljárás amivel az $1, 2, 3, 4$ bármely permutációja balra kifuthat?

    Ha három leágazás van, hány vagon összes permutációja futhat ki? Elemezzük a feladatot az általános esetben is!

91. 27 pénzérme közül egykönnyebb a többinél. Egy kétkarú mérleggel lehet-e három méréssel a hamisat kiválasztani? Mi a helyzet 22 pénzérme esetén? 16 pénzérménél?

92. Adott 10 zsák, egy zsákban 9 grammos (megnyírt) aranypénzek vannak, a többiekben "rendes" 10 grammosak. Egy súlymérő segítségével meg lehet-e határozni, hogy melyik zsákban van a hamis pénzérme?

93. 128 ember közül egy ebola vírussal fertőzött. Egy tesztcsík kimutatja a vírus jelenlétét, de csak 7 áll rendelkezésre. Mindenkitől vért vesznek. Kémcső számtalan van, a tesztcsíkok egyszer használatosak. Ki lehet-e mutatni a fertőzött személyt?

94. Legyen $F_0 = 0$; $F_1 = 1$ és $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ az ismert Fibonacci sorozat. Igazoljuk, hogy minden természetes szám felírható egy vagy több *különböző* F_n segítségével. Adjunk is egy eljárást erre a felírásra!