Lássátok be, hogy a következő két összefüggés is helyes!

$$P(E|JOBB) = \frac{1}{6}P(E|KEZDŐ) + \frac{2}{6}P(E|JOBB) + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}P(E|BAL) + \frac{1}{6}P(E|KÖZÉP);$$

$$P(E|KÖZÉP) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}P(E|BAL) + \frac{1}{6}P(E|JOBB) + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{2}{6}P(E|KÖZÉP).$$

Jelölésünket tovább egyszerűsítve, legyen

$$x_1 = P(E|KEZDŐ); \quad x_2 = P(E|KÖZÉP);$$
$$x_3 = P(E|BAL); \quad x_4 = P(E|JOBB).$$

Írjuk fel ezekkel a nyert egyenleteket!

$$x_3 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{6}x_3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{6}x_2;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4);$$

$$x_4 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{6}x_4 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_2;$$

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(x_3 + x_4) + \frac{2}{6}x_2.$$

Az első és a harmadik egyenlet összeadásakor

$$x_3 + x_4 = \frac{2}{3}(x_1 + x_2) + \frac{1}{3},$$

a második és a negyedik egyenlet összeadásakor

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x_3 + x_4)$$

adódik. Az utóbbit az előzőbe helyettesítve nyerjük, hogy

$$x_3 + x_4 = 1, \quad \text{tehát} \quad x_1 = P(E|KEZDŐ) = \frac{1}{2}.$$

A már említett szimmetria miatt

$$P(M|KEZDŐ) = P(E|KEZDŐ),$$

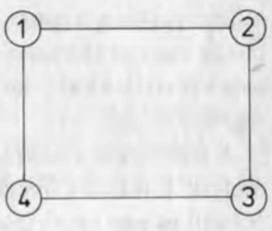
tehát

$$P(M|KEZDŐ) + P(E|KEZDŐ) = P(M) + P(E) = 1.$$

Így P(a játék örökké tart) = 0 lehet csak.

Négyzetjáték

Egy négyzet négy csúcsát az 1; 2; 3; 4 számokkal megszámoztuk. Ezen játszik egymással *Világos* és *Sötét* az alábbi szabály szerint: *Világos* kezd, majd felváltva dobnak kockával; a soron következő játékos addig dob kockával, amíg az 1; 2; 3; 4 számok valamelyikét dobja. Ekkor egy saját (nevével azonos színű) bábuját az ilyen számú csúcsra helyezi. Ha ott társa bábuja volt már, akkor azt visszaadja. Ha saját bábuja volt ott, semmit nem tesz. (Minden csúcson legfeljebb egy bábu lehet egyszerre.)



Az nyer, aki egy oldalt előbb elfoglal, azaz az oldal mindkét végpontjára saját bábuját tudta lerakni.

Azt vizsgáljuk, hogy milyen valószínűséggel
- nyer a kezdő *Világos;*
- nyer *Sötét;*
- tart örökké a játék.

(Ez a három esemény teljes eseményrendszert alkot: egymást páronként kizárják, s közülük valamelyik biztosan bekövetkezik, ezért P(*Világos* nyer) + P(*Sötét* nyer) + P(örökké tart) = 1.)

Szemléletünkre támaszkodva ismét azt várjuk, hogy

$$P(\text{örökké tart}) = 0,$$

tehát „a játék örökké tart", egy nulla valószínűségű, bár elvben elképzelhető esemény. Ezt a szemléletes tényt akkor bizonyítjuk be, ha megmutatjuk, hogy

$$P(\textit{Világos}\ \text{nyer}) + P(\textit{Sötét}\ \text{nyer}) = 1.$$

Először a $P(\textit{Világos}$ nyer) valószínűséget számítjuk ki. A klasszikus valószínűségszámítás leszámlálási trükkjei most sem segítenek. A „lehetséges kimenetelek" számbavételéhez hasonlóan feltérképezhetjük, milyen különböző bábuelhelyezkedések lehetnek, amikor valamelyik játékos éppen soron következik. Az ilyen elhelyezkedéseket a játék *állapotainak* fogjuk nevezni. Azt is feltüntethetjük, hogy melyik állapotból melyik állapotba, éspedig milyen valószínűséggel tudunk eljutni. Nem szeretnénk túl sok állapottal dolgozni, ezért *nem különböztetjük meg* azokat az állapotokat egymástól, amelyek esetén a soron következő játékos nyerési esélye szimmetriaokokból nyilvánvalóan azonos. Ezeket az állapotokat a háromszögjátékhoz hasonlóan grafikusan is ábrázoljuk, a köztük levő lehetséges átmeneteket nyilakkal jelezzük, a nyilakra a megfelelő *átmenetvalószínűségeket* írjuk.

A lehetséges állapotokat két csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy melyik játékos következik. Ennek megfelelően jelöljük meg őket: V betű és egy szám jelöli azokat az állapotokat, amelyekben *Világos* következik; S betű és egy szám azokat, amelyekben *Sötét* következik. A további szempont: milyen bábuk vannak a táblán, és azok hogyan helyezkednek el.

0 bábu csak kezdetben lehet a táblán. Nevezzük ezt *KEZDET* állapotnak (ekkor *Világos* következik).

Ha egy bábu van a táblán, akkor annak a színe ugyanolyan, mint az utolsó dobóé. Jelöljük ezt a két állapotot $V1$-gyel és $S1$-gyel. Tehát:

$V1$:= egy sötét bábu van a táblán, és *Világos* következik;

$S1$:= egy világos bábu van a táblán, és *Sötét* következik.

Ha két bábu van a táblán, akkor azok lehetnek:

$V2$; $S2$:= egymással szemközt, és különböző színűek;

$V3$; $S3$:= egymással szemközt, és azonos színűek;

$V4$; $S4$:= világos bábu sötét szomszéddal.

($V3$ esetén mindkét bábu sötét; $S3$ esetén mindkettő világos. Miért?)

A két bábu bármely más elhelyezkedése esetén vége a játéknak.

Három bábu esetén csak akkor nem fejeződik be a játék, ha két azonos színű egymással szemben van, s közöttük egy eltérő színű. Ennek felel meg a következő két-két állapot:

$V5$; $S5$: = a soron következő játékosnak egy bábuja van a táblán, amelyet két másik színű bábu fog közre;

$V6$; $S6$: = a soron következő játékos két bábuja egy másik színűt fog közre.

Végül négy bábu is lehet a táblán:

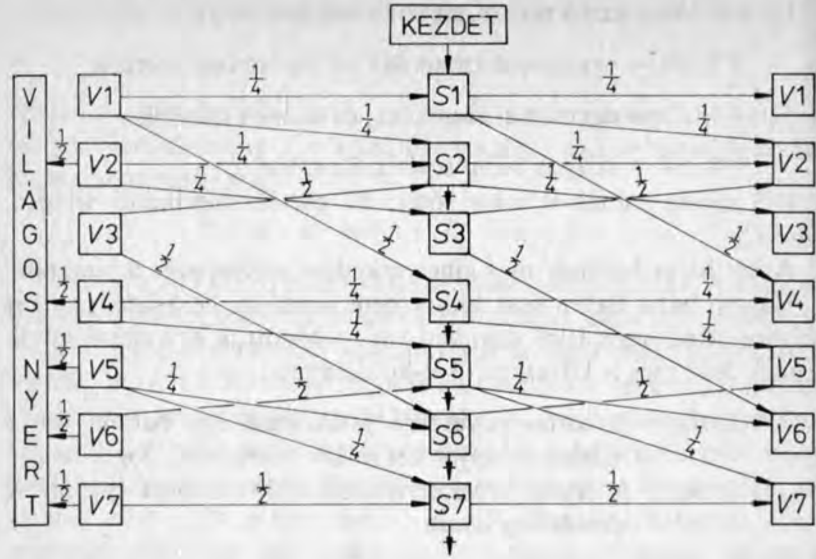
$V7$; $S7$: = két-két átlósan elhelyezkedő sötét és világos bábu van a táblán.

A *21. ábra* segítségével nyomon követhetjük, hogyan váltogathatják egymást az egyes állapotok, beleértve a végső állapotokat is, amikor valamelyik játékos nyer. Az egyes átmeneteket jelző nyilakon feltüntettük az átmenetvalószínűségeket.

Természetesen be kell látni, hogy a *21. ábrába* foglalt állítások helyesek. Szimmetria miatt elég igazolni az ábra első felét, tehát azokat az állapotokat, amikor *Világos* következik. Ezek közül mi az első három állapottal foglalkozunk.

V1 állapot: A táblán egy sötét bábu van, és *Világos* következik. Három eset van:

a) ugyanolyan számot dob, mint ahol a bábu áll; ez egyféleképpen következhet be, így valószínűsége $\frac{1}{4}$, ekkor a sötét bábut világosra cseréli ki, tehát az $S1$ állapot következik;



21. ábra. A "Négyzetjáték" folyamatábrája. † jelentése: Sötét dobása után a játék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel befejeződik

b) a négyzeten levő bábuval „szemközti" számot dobja; ennek a valószínűsége is $\frac{1}{4}$, s az új állapot *S*2;

c) végül kétféleképpen dobhat szomszédos számot, így $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kerül az *S*4 állapotba.

*V*2 *állapot:* Egymással szemközt elhelyezett különböző színű bábuk vannak a táblán, és *Világos* következik. Most is három eset van:

a) dobhat ugyanolyan számot, mint ahol saját bábuja van; ekkor a tábla változatlan marad, tehát az *S*2 állapot következik, s a megfelelő valószínűség $\frac{1}{4}$;

b) dobhat olyan számot, mint ahol partnere bábuja áll; ekkor két egymással szemközt elhelyezkedő világos bábu lesz a táblán,

tehát az *S*3 állapot következik, a megfelelő valószínűség nyilván ismét $\frac{1}{4}$;

c) ha a másik két szám valamelyikét dobja, akkor egyik oldal mindkét végpontjára világos bábu kerül, tehát *Világos* nyert; ez kétféleképpen következhet be, tehát a megfelelő valószínűség $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

*V*3 *állapot:* Két átlósan elhelyezkedő sötét bábu van, és *Világos* következik. Vagy olyant dob, ahol már áll bábu, ekkor *S*2 következik, vagy olyant, ahol nem áll bábu, ekkor *S*6 következik. A kétféle átmenet egyenlően valószínű, tehát mindkét valószínűség $\frac{1}{2}$.

Gondoljátok végig, hogy a másik négy állapotra vonatkozó állítások is igazak!

A *P*(*Világos* nyer) valószínűség kiszámítását tűztük ki célul. Ehhez most egy kissé többet is ki kell számolni, nevezetesen meghatározzuk a

$$p_i = P(\textit{Világos} \text{ a } Vi \text{ állapotból indulva nyer})$$

valószínűségeket. A háromszögjátékhoz hasonlóan egy egyenletrendszert állítunk fel. Első lépésként kiiktatjuk a vizsgálatunkból az *S* állapotokat, hiszen *Világos* csak akkor nyerhet, ha ő van soron. Ismét gyorsírási jelölést vezetünk be:

Vi→*Vj*: = *Világos* a *Vi* állapotban dob, de nem nyert;
így *Sötét* következik, az ő dobása után sem fejeződik be a játék;
az új állapot *Vj* (i; $j = 1$; 2; ...; 7).

Ugyancsak röviden azt mondjuk hogy „*Vi*-ből nyer", ahelyett, hogy a teljes „*Világos* a *Vi* állapotból indulva nyer" mondatot ismételgetnénk. Bontsuk föl a „*Vi*-ből nyer" eseményt egymást kizáró események összegére:

(*Vi*-ből nyer) = (*Világos* rögtön nyer) +
+ (*Vi*→*V*1 *és* *V*1-ből nyer) + (*Vi*→*V*2 *és* *V*2-ből nyer) + ... +
+ (*Vi*→*V*7 *és* *V*7-ből nyer).

Mivel a jobb oldalon egymást kizáró események vannak, így valószínűségeik összege a bal oldal keresett P_i valószínűségét adja meg. A folyamatábráról leolvashatjuk, hogy a

$$P(\textit{Világos } Vi \text{ állapotból rögtön nyer})$$

valószínűség $V1$ és $V3$ esetén nulla, különben $\frac{1}{2}$. A többi esemény valószínűségének meghatározásához a feltételes valószínűség fogalmát használjuk föl.

$$P(Vi \to Vj \textit{ és } Vj\text{-ből nyer}) =$$
$$= P(Vj\text{-ből nyer} \mid Vi \to Vj) P(Vi \to Vj).$$

Az itt szereplő feltételes valószínűség nem függ a játék korábbi lefolyásától: Ha a Vj állapotban vagyunk, akkor a játék további lefolyását egyáltalán nem befolyásolja, hogyan jutottunk oda. Tehát

$$P(Vj\text{-ből nyer} \mid Vi \to Vj) = P(Vj\text{-ből nyer}) = p_j.$$

Ezzel már ki is alakultak egyenleteink:

$$p_1 = P(V1\text{-ből rögtön nyer}) + p_1 P(V1 \to V1) +$$
$$+ p_2 P(V1 \to V2) + \ldots + p_7 P(V1 \to V7);$$

$$p_2 = P(V2\text{-ből rögtön nyer}) + p_1 P(V2 \to V1) +$$
$$+ p_2 P(V2 \to V2) + \ldots + p_7 P(V2 \to V7);$$

$$\vdots$$

$$p_7 = P(V7\text{-ből rögtön nyer}) + p_1 P(V7 \to V1) +$$
$$+ p_2 P(V7 \to V2) + \ldots + p_7 P(V7 \to V7).$$

A $\sum$ jel használatával:

$$p_i = P(Vi\text{-ből rögtön nyer}) + \sum_{j=1}^{7} p_j P(Vi \to Vj).$$

Az egyenletrendszerben szereplő együtthatókat a $P\,(Vi \to Vj)$ átmenetvalószínűséggel adják meg. Ezek meghatározásához segít bennünket, ha a folyamatábrán feltérképezzük, hogy milyen közbülső S állapotokon keresztül juthatunk el Vi-ből Vj-be:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7
1	$S1$	$S1$; $S2$	$S2$	$S1$; $S4$	$S4$	–	–
2	–	$S2$; $S3$	$S2$	–	–	$S3$	–
3	–	$S2$	$S2$	–	$S6$	–	–
4	–	–	–	$S4$	$S4$	$S5$	$S5$
5	–	–	–	–	$S6$	–	$S7$
6	–	–	–	–	–	$S5$	$S5$
7	–	–	–	–	–	–	$S7$

Ha nincs olyan S állapot, melyen keresztül Vi-ből Vj-be jutnánk, akkor nyilvánvalóan $P(Vi \to Vj) = 0$. A nem nulla átmenetvalószínűségek közül kettőt meghatározunk:

$$P(V1 \to V1) =$$

$$= P(V \text{ még egyszer sorra kerül a } V1 \text{ állapotban} \mid S \text{ az } S1 \text{ állapotban volt}) \, P(\text{a } V1 \text{ állapotot az } S1 \text{ állapot követi}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16};$$

$$P(V1 \to V2) = P(V1 \to V2 \textit{ és } V1\text{-et } S1 \text{ követi}) +$$
$$+ P(V1 \to V2 \textit{ és } V1\text{-et } S2 \text{ követi}) =$$
$$= P(V1 \to V2 \mid V1\text{-et } S1 \text{ követi}) P(V1\text{-et } S1 \text{ követi}) +$$
$$+ P(V1 \to V2 \mid V1\text{-et } S2 \text{ követi}) P(V1\text{-et } S2 \text{ követi}) =$$
$$= P(S1\text{-et } V1 \text{ követi}) P(V1\text{-et } S1 \text{ követi}) +$$
$$+ P(S2\text{-t } V1 \text{ követi}) P(V1\text{-et } S2 \text{ követi}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ugyanígy lehet meghatározni a többi átmenetvalószínűséget is:

$$P(V1 \to V3) = P(V2 \to V3) = P(V4 \to V4) = P(V4 \to V5) =$$
$$= P(V4 \to V6) = P(V4 \to V7) = \frac{1}{16};$$

$$P(V1 \to V5) = P(V2 \to V6) = P(V3 \to V2) = P(V3 \to V3) =$$
$$= P(V5 \to V5) = P(V5 \to V7) = P(V6 \to V6) = P(V6 \to V7) = \frac{1}{8};$$

$$P(V2 \to V2) = \frac{3}{16};$$

$$P(V1\to V4) = P(V3\to V5) = P(V7\to V7) = \frac{1}{4}.$$

Ellenőrizzetek ezek közül néhányat!

Az átmenetvalószínűségek számszerű értékeinek ismeretében már felírhatjuk a hétismeretlenes egyenletrendszert:

$$p_1 = 0+\frac{1}{16}p_1+\frac{1}{8}p_2+\frac{1}{16}p_3+\frac{1}{4}p_4+\frac{1}{8}p_5+0+0;$$

$$p_2 = \frac{1}{2}+0+\frac{3}{16}p_2+\frac{1}{16}p_3+0+0+\frac{1}{8}p_6+0;$$

$$p_3 = 0+0+\frac{1}{8}p_2+\frac{1}{8}p_3+0+\frac{1}{4}p_5+0+0;$$

$$p_4 = \frac{1}{2}+0+0+0+\frac{1}{16}p_4+\frac{1}{16}p_5+\frac{1}{16}p_6+\frac{1}{16}p_7;$$

$$p_5 = \frac{1}{2}+0+0+0+0+\frac{1}{8}p_5+0+\frac{1}{8}p_7;$$

$$p_6 = \frac{1}{2}+0+0+0+0+0+\frac{1}{8}p_6+\frac{1}{8}p_7;$$

$$p_7 = \frac{1}{2}+0+0+0+0+0+0+\frac{1}{4}p_7.$$

Egyenletrendszerünket „hátulról" kezdve oldhatjuk meg leggyorsabban:

$$p_7 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}p_7 \Leftrightarrow \frac{3}{4}p_7 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_7 = \frac{2}{3};$$

$$p_6 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}p_6+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow p_6 = \frac{2}{3};$$

$$p_5 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}p_5+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow p_5 = \frac{2}{3};$$

$$p_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}p_4+3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow p_4 = \frac{2}{3}.$$

Eddig egyszerű visszahelyettesítéssel célhoz jutottunk. p_2 és p_3 értékét egy kétismeretlenes egyenletrendszer adja:

$$p_2 = \frac{7}{12}+\frac{3}{16}p_2+\frac{1}{16}p_3;$$

$$p_3 = \frac{1}{6}+\frac{1}{8}p_2+\frac{1}{8}p_3.$$

Ellenőrizzétek, hogy ennek a megoldása:

$$p_2 = \frac{20}{27};\quad p_3 = \frac{8}{27}.$$

Végül ismét visszahelyettesítéssel adódik p_1:

$$\frac{15}{16}p_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{20}{27}+\frac{1}{16}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow p_1 = \frac{52}{135}.$$

Most már könnyen válaszolhatunk az eredeti kérdésre:

$P(\textit{Világos}$ nyer) =

= $P(\textit{Világos}$ másodszorra $V1$-be kerül és nyer) +

+ $P(\textit{Világos}$ másodszorra $V2$-be kerül és nyer) +

+ $P(\textit{Világos}$ másodszorra $V4$-be kerül és nyer) =

= $P(V1$-ből nyer | másodszor $V1$-be kerül) $P(S1$-ből $V1$-be kerül) +

+ $P(V2$-ből nyer | másodszor $V2$-be kerül) $P(S1$-ből $V2$-be kerül) +

+ $P(V4$-ből nyer | másodszor $V4$-be kerül) $P(S1$-ből $V4$-be kerül) =

= $P(V1$-ből nyer) $P(S1$-ből $V1$-be kerül) +

+ $P(V2$-ből nyer) $P(S1$-ből $V2$-be kerül) +

+ $P(V4$-ből nyer) $P(S1$-ből $V4$-be kerül) =

$$= p_1 \cdot \frac{1}{4} + p_2 \cdot \frac{1}{4} + p_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{52}{135} \cdot \frac{1}{4} + \frac{20}{27} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{83}{135}.$$

Hasonlítsátok össze ezt az eredményt a tippetekkel!

Szeretnénk tudni, hogy a játék tényleg csak nulla valószínűséggel tarthat-e örökké. Ehhez a P(*Sötét* nyer) valószínűséget kell meghatározni. Szimmetria miatt

$$P(\textit{Sötét} \text{ nyer}) = P(\textit{Világos } V1\text{-ből nyer}) = p_1 = \frac{52}{135},$$

így

$$P(\textit{Világos} \text{ nyer}) + P(\textit{Sötét} \text{ nyer}) = \frac{83}{135} + \frac{52}{135} = 1,$$

tehát

$$P(\text{a játék örökké tart}) = 0.$$

A keresett valószínűséget lassan, több oldalnyi terjedelemben tudtuk csak meghatározni. Ilyen esetekben célszerű a valószínűségek pontos kiszámítása helyett azok közelítő értékeit megadni. A jó közelítés eszköze lehet a számítógépes *szimulálás*. (A latin eredetű szimulálás szó a tudományokban a következő értelemben használatos: „valamilyen rendszer vagy jelenség várható alakulásának számbavétele matematikai modell segítségével.") Ennek során a *„Négyzetjáték"*-ot a számítógépbe épített véletlenszám-generátor segítségével nagyon sokszor lejátszhatjuk, s megfigyelhetjük, hogy hányszor nyertek a játékosok. Egy ilyen programot megadunk a HT–1080 Z számítógépre *(4. program)*.

A program tartalmaz egy késleltetési paramétert (U-t). Az $U=600$ választás mellett a játékok lefolyása a képernyőn folyamatosan nyomon követhető. Nagyszámú játszma esetén az $U=0$ választás a célszerű. A játszmák száma (J) a program másik paramétere. Elfogadható becsléshez J-t legalább 500-nak kell választani. A futás végén a relatív gyakoriságok és az átlagos lépésszámok is megjelennek a képernyőn.


```
10 CLS : U=600
15 PRINT @ 160,"U=";:INPUT U
20 GOSUB 340
30 PRINT@290, "JATSZMAK SZAMA = ";: INPUT J
40 FOR I=1 TO J
50 REM ===== UJ JATEK JON ===============
60 C(1)=0:C(2)=0:C(3)=0:C(4)=0 : N=0
70 FOR Z=1 TO U:NEXT Z:PRINT@800,I;"-IK JATSZMA JON"
80 GOSUB 340 : FOR Z=1 TO U:NEXT Z
90 PRINT @ 656,"1. JATEKOS JON"
100 R=RND(4) : N=N+1
110 C(R)=1
120 GOSUB 340
130 H=R+1 : IF H=5 THEN H=1
140 IF C(H)=1 THEN 280
150 K=R-1 : IF K=0 THEN K=4
160 IF C(K)=1 THEN 280
170 FOR Z=1 TO U:NEXT Z
180 PRINT @ 656,"2. JATEKOS JON"
190 R=RND(4) : N=N+1
200 C(R)=2
210 GOSUB 340
215 FOR Z=1 TO U : NEXT Z
220 H=R+1 : IF H=5 THEN H=1
230 IF C(H)=2 THEN 290
240 K=R-1 : IF K=0 THEN K=4
250 IF C(K)=2 THEN 290
260 GOTO 90
270 FOR Z=1 TO 2000:NEXT Z
280 PRINT@512, "aZ 1. JATEKOS NYERT";N;" LEPESBEN":E=E+1:L=L+N:GOTO300
290 PRINT@ 512, "aZ 2. JATEKOS NYERT";N;" LEPESBEN":M=M+1:L=L+N
300 NEXT I
310 PRINT "RELATIV GYAKORISAGOK :  1. ";E/J;"   2.";M/J
320 PRINT "ATLAGOS LEPESSZAM : "; L/J
330 END
340 PRINT @ 0,C(1) : PRINT @18,C(2)
350 PRINT@384,C(4) : PRINT@402,C(3)
360 RETURN
```

```
0                 0

                        U=? 100

                     JATSZMAK SZAMA = ? 5

1                 1

AZ 1. JATEKOS NYERT 3  LEPESBEN
RELATIV GYAKORISAGOK :  1.  .4    2.  .6
ATLAGOS LEPESSZAM :  4.4
READY
```