$$P(\text{minden szám beírható})$$

valószínűség maximalizálása helyett vizsgálhatnánk azt a beírási szabályt is, melyre az

$$E(\text{beírt számok száma})$$

várható érték a legnagyobb. Ekkor a $P(n;\, k)$ valószínűségek helyett a hasonlóan értelmezett $E(n;\, k)$ várható értékekre kellene rekurziós összefüggést felírni. Ez a feladat is hasonlóan oldható meg.

Ez, és a megelőző példa is játékról szól. A megoldás módszere azonban nagyon gyakran alkalmazható a gazdasági élet területén fellépő problémák megoldásában.

Egyforma–Másforma

Két játékos, *Egyforma* és *Másforma* társasjátékot játszik: Mindegyikük titokban a markába vesz vagy 1, vagy 2 pénzdarabot, azután megmutatják egymásnak, mi van a markukban. Ha egyforma sok pénz van a markukban, akkor *Egyforma* nyer; ha nem, akkor *Másforma*. A nyerő annyi pénzt kap partnerétől, ahány pénzdarab a két marokban összesen van. Tehát *Egyforma* nyer két pénzt, ha mindketten egy pénzdarabot rejtettek, míg négy pénzt, ha mindketten kettőt vettek a markukba; különben *Másforma* nyer három pénzt. *Egyforma* elmagyarázza, hogy ez egy igazságos játék: az esetek 50%-ában *Másforma* nyer 3-at, 25–25%-ában veszít 2-t és 4-et, tehát az átlagos nyereség nulla. Magában viszont így okoskodik: én az esetek döntő többségében 2-t dugok. Ha *Másforma* az esetek felében 1-et, másik felében 2-t dug, akkor az esetek felében én nyerek, mégpedig ezek többségében 4-et, s így túljárok *Másforma* eszén. Ezt a taktikát *Másforma* hamar kiismerte, s a maga javára fordította: az esetek többségében ő egyet dugott, s így többnyire ő nyert. Most *Egyforma* is taktikát változtatott, egyszerre elkezdett egy pénzdarabot dugni, és nyerni. És ez így folytatódott jó ideig. Végül rájöttek, hogy úgy kell dugniuk, hogy minden időpillanatban véletlenszerűen, az előzményektől teljesen függetlenül választanak 1 vagy 2 pénzdarabot.

Egyforma választ egy p valószínűségű A eseményt, és ezt figyeli meg egymás után, egymástól függetlenül. Ha bekövetkezik A, akkor egy pénzdarabot vesz a markába; ha nem, akkor kettőt. *Másforma* hasonlóan jár el. Ő egy q valószínűségű B eseményt figyel meg, s aszerint tippel. Az A és B események is függetlenek egymástól. Ezért

Egyforma akkor nyer kettőt, ha AB következik be;

Egyforma akkor nyer négyet, ha $\bar{A}\bar{B}$ következik be;

Egyforma hármat veszít (vagy ami ugyanaz: mínusz hármat nyer), ha $A\bar{B}+\bar{A}B$ következik be.

Tehát

Egyforma nyereménye	2	-3	4
ennek valószínűsége	$P(AB)=pq$	$p(1-q)+q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$

Ezért *Egyforma* várható nyereménye:

$$E(\textit{Egyforma}\text{ nyereménye}) = 2pq-3p(1-q)-3q(1-p)+ +4(1-p)(1-q) = 12pq-7p-7q+4.$$

Egyforma ezt a nyereményt maximalizálni, *Másforma* minimalizálni szeretné. E két ellentétes törekvést „békíti" össze a *maximin-elv* és a *minimax-elv:*

Egyforma így okoskodik: *Másforma* viszonylag hamar tud jó becslést adni p-re; egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy pontosan ismeri is. Ekkor olyan q_p-t választ, amelyre

$$12pq_p-7p-7q_p+4 = \min_{0\le q\le 1}(12pq-7p-7q+4).$$

Ez számomra a legkedvezőtlenebb eset, ezért olyan p-t akarok választani, amelyik ebben a legrosszabb helyzetben a lehető legnagyobb nyereményt biztosítja. Ekkor ugyanis legalább

$$\text{maximin} = \max_{0\le p\le 1}\left[\min_{0\le q\le 1}(12pq-7p-7q+4)\right]$$

nyereményre számíthatok, bárhogy játsszon is *Másforma*.

Határozzuk meg rendre q_p, a maximumot adó p és maximin értékét.

$$12pq-7p-7q+4 = q(12p-7)+(4-7p).$$

Itt a második összeadandó nem függ q-tól, az első összeadandó pedig q-nak számszorosa. Ez a [0; 1]-ban a minimumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel:

$$q_p=1, \quad \text{ha} \quad 12p-7<0; \qquad q_p=0, \quad \text{ha} \quad 12p-7>0.$$

A $12p-7=0$ esetben a nyeremény nem függ q-tól. Így

$$\min_{0\leqq q\leqq 1} (12pq-7q-7p+4) = \begin{cases} 5p-3, & \text{ha} \quad 12p<7; \\ 4-7p, & \text{ha} \quad 12p>7. \end{cases}$$

Ennek a minimumnak a maximumát kell megkeresni a $0\leqq p\leqq 1$ intervallumban. Ehhez ki kell számítani a

$$\max_{0\leqq p\leqq \frac{7}{12}} (5p-3) \quad \text{és a} \quad \max_{\frac{7}{12}\leqq p\leqq 1} (4-7p)$$

maximumokat, s közülük a nagyobbikat venni.

Az első függvény monoton növekvő, a második monoton csökkenő. Így mindkettő a $p_0=\frac{7}{12}$ pontban veszi fel legnagyobb értékét. Ezek:

$$5\cdot\frac{7}{12}-3=-\frac{1}{12} \quad \text{és} \quad 4-7\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{12}.$$

Ez azt jelenti, hogy *Egyforma* tud úgy játszani, hogy játékonként átlagosan nem veszít többet $\frac{1}{12}$-nél. Bele kell-e ebbe törődnie? Tud-e *Másfoma* úgy játszani, hogy ilyen arányú veszteségre kényszerítse *Egyformát?* Erre a kérdésre úgy válaszolunk, hogy *Másforma* szempontjából is végigkövetjük az előző gondolatmenetet. Bármilyen q-t is választ, ezt *Egyforma* hamar felismerheti. Ekkor olyan p_q-t fog választani, amelyikre

$$12p_qq-7p_q-7q+4 = \max_{0\leqq p\leqq 1} (12pq-7p-7q+4).$$

Másforma olyan q-t keres, amelyre ez a maximum a lehető legkisebb. A

$$\text{minimax} = \min_{0\leqq q\leqq 1} \left[\max_{0\leqq p\leqq 1} (12pq-7p-7q+4)\right]$$

nyereségnél nagyobbra nem számíthat ugyanis *Egyforma*, bármilyen p-t is választ.

Ezt a minimax feladatot ugyanúgy oldhatjuk meg, mint a megelőző maximin feladatot:

$$12pq-7p-7q+4 = p(12q-7)+(4-7q).$$

Ez p-nek lineáris függvénye, tehát növekvő, ha p együtthatója pozitív, és csökkenő, ha negatív. Ezért

$$\max_{0\leqq p\leqq 1} (12pq-7p-7q+4) = \begin{cases} 5q-3, & \text{ha} \quad 12q-7>0; \\ 4-7q, & \text{ha} \quad 12q-7<0. \end{cases}$$

Így

$$\text{minimax} = \min\left[\min_{\frac{7}{12}\leqq q\leqq 1} (5q-3); \quad \min_{0\leqq q\leqq \frac{7}{12}} (4-7q)\right].$$

A szögletes zárójelben levő mindkét lineáris függvény minimumhelye: $q_0=\frac{7}{12}$, s mint láttuk, ekkor a két függvény értéke azonos: $-\frac{1}{12}$. Ha tehát *Másforma* egy $\frac{7}{12}$ valószínűségű esemény független megfigyelései alapján rejti a pénzdarabokat, akkor játékonkénti $\frac{1}{12}$ pénz vesztésére tudja kényszeríteni *Egyformát*, bárhogyan is játsszon az.

Könnyen találhatunk olyan véletlen esemény generátort, amellyel $\frac{7}{12}$ valószínűségű A esemény generálható. Ehhez egy érmére és egy kockára van szükség. Legyen A az az esemény, hogy *az érme fejre esik* (ekkor nem is kell a kockát feldobni), vagy *az érme írást mutat és a kockán 6-ost dobunk*.

Ezt a játékot két személy játszhatja. Nyereményük összege minden játékban nulla. (Az egyik annyit nyer, amennyit a másik veszít.) Az ilyen játékokat kétszemélyes zérus összegű játékoknak nevezik. Ezekben a játékokban a minimax = maximin elv mindig alkalmazható, bár a konkrét számolások nagyon bonyolultak lehetnek.

Feladatok:

139. Ervin előfizetéses lottószelvénnyel lottózik. Számai állandóak; mindig az 1; 2; 3; 4; 5 számokkal játszik. Így okoskodik: bármilyen számokkal is játszunk, a 2; 3; 4 és 5 találat valószínűsége ugyanakkora. Ezt azonban az emberek többsége nem hiszi el. Teljesen valószínűtlennek tartják, hogy öt egymás utáni számot húzzanak ki, ezért ilyeneket nem is játszanak. Ha tehát nekem netán négyes (vagy hármas) találatom lesz, akkor a nyereményem lényegesen nagyobb lesz a szokásos, átlagos nyereménynél. Helyeseled-e Ervin elképzelését?

140. *a)* Hány húzásból áll átlagosan a Monte Belloi játék, ha az optimális stratégia szerint játsszák?

b) Változtassuk meg a játékszabályt: minden kihúzott golyóért a játékos egy pénzt fizet a kaszinónak, viszont 10-et nyer, illetve veszít nyerő, illetve vesztő golyó esetén. Érdemes-e most is beszállni a játékba?

c) Kedvez-e a játékosnak az eredeti játék, ha az urnába 5 vesztő és 3 nyerő golyót tesznek?

141. A *„Csak rendezve jó!"* játékban mutasd meg, hogy $P(n; 3)$-at valóban a táblázatban leírt szabály szerinti elsőszám-elhelyezés esetén kapjuk meg!

Add meg azt a stratégiát, amely a beírható számok várható értékét maximalizálja!

Játsszd el a játék ötablakos változatát a valódi lottóhúzás esetén! (A rádió pénteken 9 óra 55 perckor közvetíti a sorsolást, ekkor a számokat a húzás sorrendjében közlik.) Kísérelj meg optimális (vagy közel optimális) stratégiát keresni!

142. A Kis Matematikusok Baráti Körében játsszák a 7×10-es játékot: Egy urnában 70 egyforma golyó van, ezek között 7–7 tartalmazza a 0; 1; …; 9 számjegyek mindegyikét. Visszatevés nélkül kihúznak ebből az urnából hetet. Az egymás után kihúzott számjegyek egy tízes számrendszerbeli, legfeljebb 7-jegyű számot határoznak meg. Mire tippeljünk, ha ezt a számot el akarjuk előre találni? (Érdemes 7 és 10 helyett kisebb számokkal kezdeni a vizsgálatokat!)

143. Az *Egyforma–Másforma* játékot módosítják: Most 0 vagy 1 pénzdarabot lehet elrejteni, más szabály nem változik. Tehát *Másforma* mindig 1-et nyer, ha különbözőt rejtenek el, míg *Egyforma* 2-t, ha mindketten egyet vesznek a markukba. Előnyösebb-e ez a játék *Egyformának*, mint a korábbi változat?

144. *Egyforma* úgy gondolja, azért veszít, mert *Másforma* nyereménye mindig ugyanakkora, ha ő nyer. Ezért új játékot ajánl: Most a snóblihoz hasonlóan 1; 2 vagy 3 pénzdarabot lehet rejteni. Ha egyforma sokat dugtak, *Egyforma* nyer, mégpedig mindig 4-et. Különben *Másforma* kap annyit, mint az eldugott pénzdarabok különbségének a négyzete. Most *Egyforma* három esetben nyer négyet; *Másforma* két esetben négyet, négy esetben egyet. Tehát megint igazságosnak tűnik a játék. Valóban az is?