Akár kérünk egy húzást, akár nem, nyereményünk várható értéke nulla. Az első esetben ez egy valószínűségi változó várható értéke, amely a -1; 0; $+1$ számokat egyenlő valószínűséggel veszi fel. Így módot ad szerencseasszonynak arra, hogy kegyeibe fogadjon bennünket. A második esetben nincs bizonytalanság: nem nyerhetünk, de nem is veszíthetünk.

$$M(1;2) = \max\left\{0; \frac{1}{3}M(0;2) + \frac{2}{3}M(1;1) + \frac{1}{3}\right\} =$$

$$= \max\left\{0; \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right\} = \max\left\{0; \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3},$$

és természetesen kérünk húzást. Mivel $M(3;0)=0$ és $M(0;3)=3$, így a három golyóból álló urnákat végigvizsgáltuk. Mivel

$$M(3;2) = \max\left\{0; \frac{3}{5}M(2;2) + \frac{2}{5}M(3;1) - \frac{1}{5}\right\},$$

így a négygolyós urnák közül csak kettő érdekel bennünket: azok, amelyekben 3, illetve 2 vesztő golyó van.

$$M(3;1) = \max\left\{0; \frac{3}{4}M(2;1) + \frac{1}{4}M(3;0) - \frac{2}{4}\right\} =$$

$$= \max\left\{0; -\frac{1}{2}\right\} = 0,$$

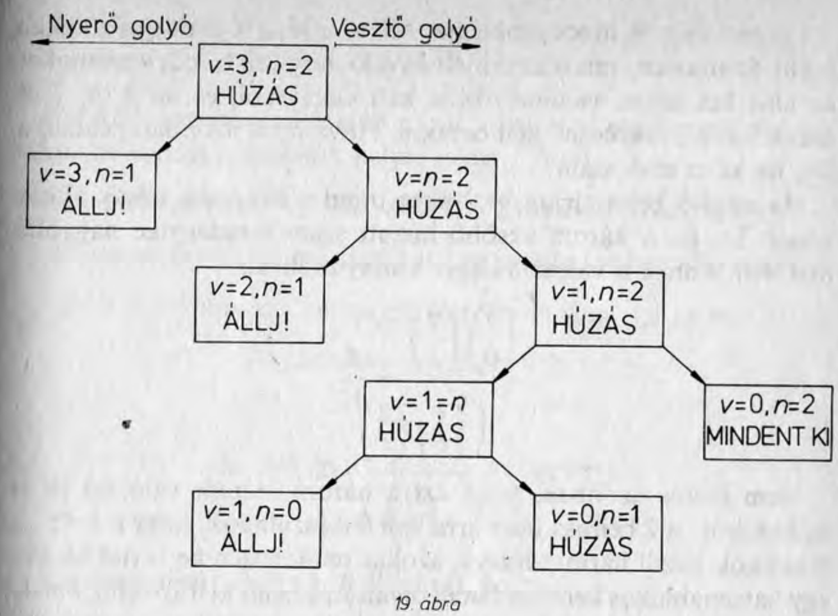
és nem kell húzást kérni;

$$M(2;2) = \max\left\{0; \frac{1}{2}M(1;2) + \frac{1}{2}M(2;1)\right\} = \max\left\{0; \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right\} = \frac{2}{3},$$

és húzást kell kérni. Visszahelyettesítve:

$$M(3;2) = \max\left\{0; \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot 0 - \frac{1}{5}\right\} = \max\left\{0; \frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}.$$

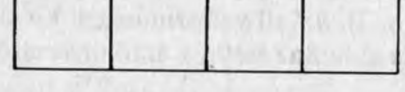
Érdemes tehát „beszállni” a játékba: $\frac{1}{5}$ pénz nyerésére számíthatunk. A jó stratégiát a *19. ábra* mutatja.



19. ábra

Csak rendezve jó!

A bevezetés 12. problémáját oldjuk meg. A 0; 1; ...; 9 számokat tartalmazó lottókerékből húzunk ki egymás után négyet, visszatevés nélkül. Ezeket rögtön a húzás után (a következő húzás előtt) be lehet írni egy négyablakos keret valamelyik ablakába. A keretben azonban nagyobb szám soha nem előzhet meg kisebbet.



E kikötés miatt előfordulhat, hogy nem lehet mind a négy kihúzott számot beírni. Olyan „beírási” szabályt szeretnénk megadni, amely esetén a lehető legnagyobb valószínűséggel mind a négy számot be tudjuk írni. Az első kérdés: hová írjuk be az első kihúzott számot?

Ha ez 0 vagy 9, nincs probléma. A 0 az első, a 9 az utolsó ablakba kerül. Szimmetria miatt az is nyilvánvaló, hogy az 1; 2; 3; 4 számokat az első két ablak valamelyikébe kell elhelyezni, és az 5; 6; 7; 8 számokat is „tükrösen" kell berakni. Hova írjuk azonban például a 2-t, ha az az első szám?

Ha az első helyre írjuk be, akkor mind a négy szám csak akkor írható be, ha a három később húzott szám mindegyike nagyobb kettőnél. Ennek a valószínűségét könnyű felírni:

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{7}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{12}.$$

Nem biztos azonban, hogy ezt a három számot valóban be is tudjuk írni. A 2 beírása után arra kell felkészülnünk, hogy a 3; 4; ...; 9 számok közül hármat húzva, azokat rendezetten be is tudjuk írni egy háromablakos keretbe. Ismét olyan stratégiát kell követni, amely mellett ez a valószínűség a legnagyobb. Az eredetihez hasonló feladatot kell megoldanunk, csak kevesebb számmal és kevesebb ablakkal. Fogalmazzuk meg általánosan a problémát:

Adott $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ számok közül egymás után kisorsolunk m-et ($1 \leqq m \leqq n$). Ezeket rendezéstartóan kell beírni egy m-ablakos keretbe. Azt a beírási szabályt tekintjük legjobbnak, amely mellett a legnagyobb a valószínűsége, hogy mind az m kisorsolt számot be tudjuk írni a keretbe. Ezt a legnagyobb valószínűséget $P(n; m)$-mel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy ez a valószínűség nem függ attól, hogy milyen konkrét (ismert) x_i számokat vizsgálunk. Alapfeladatunk $P(10; 4)$ kiszámítása, és a megfelelő szabály megállapítása. Ehhez az út $P(n; 3)$ és $P(n; 2)$, $n < 10$ valószínűségek kiszámításán át vezet.

Térjünk vissza ahhoz az esethez, amikor az első kihúzott szám a 2:

$$P\,(\text{mind a négy bemegy} \mid \text{első szám 2 } \textit{és} \text{ az első ablakba írjuk}) =$$

$$= P\,(\text{az utolsó három szám} > 2 \textit{ és } \text{azokat mind beírhatjuk}) =$$

$$= P\,(\text{a három utolsót beírhatjuk} \mid \text{ez mind} > 2)\; P\,(\text{ez mind} > 2) =$$

$$= \frac{5}{12} P(7; 3).$$

Ezt kell összehasonlítanunk azzal az esettel, amikor az elsőnek kihúzott kettest a második helyre írjuk:

$$P\,(\text{mind a négy bemegy} \mid \text{első szám 2 } \textit{és} \text{ a második ablakba írjuk}) =$$

$$= P\,(\text{egy szám} < 2,\ \text{két másik} > 2 \textit{ és } \text{a nagyobbakat be tudjuk írni}) =$$

$$= P\,(\text{nagyobbakat be tudjuk írni} \mid \text{pontosan egy szám} < 2) \cdot$$

$$\cdot\, P\,(\text{pontosan egy szám} < 2) =$$

$$= P(7; 2) \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{2} P(7; 2).$$

A kettest tehát akkor kell előreírni, ha

$$\frac{5}{12} P(7; 3) > \frac{1}{2} P(7; 2).$$

Hasonlóan vizsgálhatjuk meg azokat az eseteket is, amikor az első kihúzott szám 1; 3 vagy 4. Legyen az elsőnek kihúzott szám k ($1 \leqq k \leqq 4$).

$$P\,(\text{mind a négy bemegy} \mid \text{első szám } k \textit{ és } \text{az első ablakba írjuk}) =$$

$$= P\,(\text{három szám} > k \textit{ és } \text{azokat mind beírhatjuk}) =$$

$$= P\,(\text{a három utolsót beírhatjuk} \mid \text{ez mind} > k)\; P\,(\text{ez mind} > k) =$$

$$= P(9-k; 3) \cdot \frac{\binom{9-k}{3}}{\binom{9}{3}};$$

P (mind a négy bemegy | az első szám k *és* a második ablakba írjuk) = P (pontosan egy szám $< k$ *és* a két nagyobbat be lehet írni) = P (a két nagyobb beírható | egy szám $< k$) P (egy szám $< k$) =

$$= P(9-k;\,2)\cdot\frac{\binom{k}{1}\binom{9-k}{2}}{\binom{9}{3}}.$$

Akkor kell tehát az elsőnek kihúzott k számot előreírni, ha

$$\binom{9-k}{3}P(9-k;\,3) > k\binom{9-k}{2}P(9-k;\,2),\qquad (1\leqq k\leqq 4).\qquad (*)$$

Szükségünk van tehát a $P(n;\,3)$ és a $P(n;\,2)$ valószínűségek ismeretére. Az egyszerűbb esettel kezdjük: Ha két ablakunk van, és a számok $1;\,2;\,\ldots;\,n$, akkor az elsőre kihúzott k számot előre kell írni, ha

$$P\text{ (második szám} < k) < P\text{ (második szám} > k),$$

tehát

$$\frac{n-k}{n} > \frac{k-1}{n},\qquad\text{azaz}\qquad k < \frac{n+1}{2}.$$

Ha az első szám $> \frac{n+1}{2}$, akkor azt hátra kell írni. Ha az első szám $\frac{n+1}{2}$, akkor mindegy hová írjuk be. Állapodjunk meg az egyértelműség kedvéért abban, hogy ezt is előre írjuk! Akkor nem tudjuk mindkét számot beírni, ha

mindkét szám $\leqq \frac{n+1}{2}$, és a kisebbet húztuk másodszor,

vagy

mindkét szám $> \frac{n+1}{2}$, és a nagyobbat húztuk másodszor.

Ezért

P (nem lehet mindkét számot beírni) =

$$= P\left(\text{a második a kisebb} \mid \text{mindkettő} \leqq \frac{n+1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot P\left(\text{mindkettő} \leqq \frac{n+1}{2}\right) +$$

$$+ P\left(\text{a második a nagyobb} \mid \text{mindkettő} > \frac{n+1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot P\left(\text{mindkettő} > \frac{n+1}{2}\right).$$

Mivel minden sorrend egyformán valószínű, így mindkét feltételes valószínűség $\frac{1}{2}$. Nyertük, hogy

P (nem lehet mindkét számot beírni) =

$$= \frac{1}{2}\left[P\left(\text{mindkettő} \leqq \frac{n+1}{2}\right) + P\left(\text{mindkettő} > \frac{n+1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - P\left(\text{egyik} \leqq \frac{n+1}{2},\ \text{másik} > \frac{n+1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2P\left(\text{első} \leqq \frac{n+1}{2},\ \text{második} > \frac{n+1}{2}\right)\right],$$

így

$P(n;\,2)$ = 1 − P (nem írható be mindkettő) =

= 1 − P (nem írható be mindkettő) =

$$= \frac{1}{2} + P\left(\text{első} \leqq \frac{n+1}{2},\ \text{a második} > \frac{n+1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2k-1},$$

ha $n = 2k-1$ vagy $n = 2k$.

Számszerűen:

n	2	3; 4	5; 6	7; 8	9; 10
$P(n;\,2)$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{7}{9}$

Térjünk most át a $P(n; 3)$ valószínűségek meghatározására.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az 1; 2; ...; n számok közül húzunk hármat, és azokat egy háromablakos keretbe kell beírni. Ha az első golyó 1 (vagy n), akkor azt nyilván az első (vagy a harmadik) ablakba kell írni. Szimmetria miatt most is elegendő azt eldönteni, hogy hová kerüljön az első szám, ha az nem nagyobb $\frac{n+1}{2}$-nél. Ha az első keretbe írjuk a k számot $\left(1 \leqq k \leqq \frac{n+1}{2}\right)$, akkor

P (mindhárom beírható | első szám k *és* az első helyre írjuk) =

= P (másik kettő > k *és* mindkettőt be lehet írni) =

= P (mindkettőt be lehet írni | nagyobbak k-nál) P (nagyobbak k-nál) =

$$= P(n-k; 2) \cdot \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n-1}{2}}.$$

Hasonlóan:

P (mindhárom beírható | első szám k *és* azt középre írjuk) =

$$= P\,(\text{egyik szám} < k \text{ és a másik szám} > k) = \frac{2(k-1)(n-k)}{(n-1)(n-2)}.$$

Az elsőre kihúzott k számot tehát akkor kell előreírni, ha

$$\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n-1}{2}} P(n-k; 2) > \frac{2(k-1)(n-k)}{(n-1)(n-2)},$$

tehát ha

$$P(n-k; 2) > \frac{2(k-1)}{n-k-1}.$$

$P(9; 4)$ kiszámításához a $P(5; 3)$; $P(6; 3)$; ...; $P(9; 3)$ valószínűségeket kell meghatározni.

$n=5$ esetén $k=2$ és $k=3$ a vizsgálandó:

$$P(5-2; 2) = P(3; 2) = \frac{5}{6}; \quad \frac{2(k-1)}{n-k-1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Így a kettest már középre kell írni, annál inkább a hármast. Az optimális elhelyezés tehát:

első szám 1:	előre írjuk;
első szám 2; 3; 4:	középre írjuk;
első szám 5:	hátulra írjuk.

$$P(5; 3) = \sum_{i=1}^{5} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i) P(\text{első szám } i) =$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i) =$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{2} 2P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i) +$$

$$+ \frac{1}{5} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } 3) =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2P(4; 2) + 2 \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 3}\right] = \frac{2}{3}.$$

$n=6$ esetén ugyancsak $k=2$ és $k=3$ vizsgálandó meg:

$$P(6-2; 2) = P(4; 2) = \frac{5}{6}; \quad \frac{2(k-1)}{n-k-1} = \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{4}{6},$$

tehát ha kettes az első szám, azt is előre kell írni.

$$P(6-3; 2) = P(3; 2) = \frac{5}{6}; \quad \frac{2(k-1)}{n-k-1} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,$$

azaz a 3-as középre írandó. Optimális beírás:

első szám 1; 2: előre írjuk;
első szám 3; 4: középre írjuk;
első szám 5; 6: hátulra írjuk.

$$P(6;3)=\sum_{i=1}^{6} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i)P(\text{első szám } i)=$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i)=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(\text{mindhármat beírjuk} \mid \text{első szám } i)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[P(5;2)+P(4;2)\cdot\frac{4\cdot 3}{5\cdot 4}+\frac{2\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 4}\right]=\frac{19}{30}.$$

Ugyanígy határozható meg $n=7$; 8 és 9 esetén is a legjobb beírási szabály és $P(n;3)$. Ezeket összefoglalva megadjuk:

n	első	középső	hátsó	$P(n;3)$
	ablakba írjuk az első számot, ha az			
5	1	2; 3; 4	5	$\frac{2}{3}$
6	1; 2	3; 4	5; 6	$\frac{19}{30}$
7	1; 2	3; 4; 5	6; 7	$\frac{13}{21}$
8	1; 2	3; 4; 5; 6	7; 8	$\frac{101}{168}$
9	1; 2	3; 4; 5; 6; 7	8; 9	$\frac{7}{12}$

Most már könnyen lehet ellenőrizni, mikor teljesül a (*)-gal jelzett egyenlőtlenség. Ezt $\frac{(9-k)(8-k)}{3\cdot 2}$-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$(7-k)P(9-k;3)>3kP(9-k;2).$$

A $k=1$; 2; 3; 4 értékek mellett a bal oldalak:

$$\frac{6\cdot 101}{168}=\frac{101}{28};\ \frac{5\cdot 13}{21}=\frac{65}{21};\ \frac{4\cdot 19}{30}=\frac{38}{15};\ \frac{3\cdot 2}{3}=2;$$

jobb oldalak:

$$\frac{3\cdot 11}{14}=\frac{66}{28};\ \frac{6\cdot 11}{14}=\frac{99}{21};\ \frac{9\cdot 4}{5}=\frac{108}{15};\ \frac{12\cdot 4}{5}=\frac{48}{5}.$$

A 0; 1; ...; 9 számjegyek és négyablakos keret esetén az optimális beírási szabály:

Az első számot előre írjuk, ha az 0 vagy 1. Ebben az esetben a második számot a második ablakba írjuk, ha legfeljebb kettővel nagyobb az első számnál; a negyedik ablakba, ha 8 vagy 9; különben a harmadik ablakba. Ez utóbbi esetben már csak egyféleképpen lehet számokat beírni. Ha a második húzás után két egymás melletti ablak marad szabadon, akkor a harmadik húzás eredményét aszerint írjuk előre vagy hátra, hogy a még szóba jöhető számok első vagy második felébe tartozik.

Az első számot a második ablakba írjuk, ha a húzás 2; 3 vagy 4. Ha náluk kisebb számot húzunk, azt csak előre írhatjuk. Az első nagyobb számot ismét a „felezési elv" szerint írjuk a harmadik vagy a negyedik ablakba.

Ha 4-nél nagyobb számot húzunk, akkor ugyanúgy járunk el, mint eddig, csak most az ablakokat hátulról számozzuk meg.

Ugyanúgy, ahogy a $P(n;3)$-akat számítottuk, kiszámíthatjuk $P(10;4)$-et is. Eredmény

$$P(10;4)=\frac{551}{1260}\approx 0{,}437.$$

Ez egy nagyságrenddel nagyobb annál a valószínűségnél, hogy a húzott számok a húzás sorrendjében az egymás utáni ablakokba rendezéstartóan beírhatók legyenek. Mivel bármely kihúzott négy szám esetén azok 4!-féle sorrendje egyformán valószínű, így $\frac{1}{4!}\approx 0{,}042$ valószínűséggel növekednek az egymás utáni számok. A

$$P(\text{minden szám beírható})$$

valószínűség maximalizálása helyett vizsgálhatnánk azt a beírási szabályt is, melyre az

$$E(\text{beírt számok száma})$$

várható érték a legnagyobb. Ekkor a $P(n;\,k)$ valószínűségek helyett a hasonlóan értelmezett $E(n;\,k)$ várható értékekre kellene rekurziós összefüggést felírni. Ez a feladat is hasonlóan oldható meg.

Ez, és a megelőző példa is játékról szól. A megoldás módszere azonban nagyon gyakran alkalmazható a gazdasági élet területén fellépő problémák megoldásában.

Egyforma–Másforma

Két játékos, *Egyforma* és *Másforma* társasjátékot játszik: Mindegyikük titokban a markába vesz vagy 1, vagy 2 pénzdarabot, azután megmutatják egymásnak, mi van a markukban. Ha egyforma sok pénz van a markukban, akkor *Egyforma* nyer; ha nem, akkor *Másforma*. A nyerő annyi pénzt kap partnerétől, ahány pénzdarab a két marokban összesen van. Tehát *Egyforma* nyer két pénzt, ha mindketten egy pénzdarabot rejtettek, míg négy pénzt, ha mindketten kettőt vettek a markukba; különben *Másforma* nyer három pénzt. *Egyforma* elmagyarázza, hogy ez egy igazságos játék: az esetek 50%-ában *Másforma* nyer 3-at, 25–25%-ában veszít 2-t és 4-et, tehát az átlagos nyereség nulla. Magában viszont így okoskodik: én az esetek döntő többségében 2-t dugok. Ha *Másforma* az esetek felében 1-et, másik felében 2-t dug, akkor az esetek felében én nyerek, mégpedig ezek többségében 4-et, s így túljárok *Másforma* eszén. Ezt a taktikát *Másforma* hamar kiismerte, s a maga javára fordította: az esetek többségében ő egyet dugott, s így többnyire ő nyert. Most *Egyforma* is taktikát változtatott, egyszerre elkezdett egy pénzdarabot dugni, és nyerni. És ez így folytatódott jó ideig. Végül rájöttek, hogy úgy kell dugniuk, hogy minden időpillanatban véletlenszerűen, az előzményektől teljesen függetlenül választanak 1 vagy 2 pénzdarabot.

Egyforma választ egy p valószínűségű A eseményt, és ezt figyeli meg egymás után, egymástól függetlenül. Ha bekövetkezik A, akkor egy pénzdarabot vesz a markába; ha nem, akkor kettőt. *Másforma* hasonlóan jár el. Ő egy q valószínűségű B eseményt figyel meg, s aszerint tippel. Az A és B események is függetlenek egymástól. Ezért

Egyforma akkor nyer kettőt, ha AB következik be;

Egyforma akkor nyer négyet, ha $\bar{A}\bar{B}$ következik be;

Egyforma hármat veszít (vagy ami ugyanaz: mínusz hármat nyer), ha $A\bar{B}+\bar{A}B$ következik be.

Tehát

Egyforma nyereménye	2	-3	4
ennek valószínűsége	$P(AB)=pq$	$p(1-q)+q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$

Ezért *Egyforma* várható nyereménye:

$$E(\textit{Egyforma}\text{ nyereménye}) = 2pq-3p(1-q)-3q(1-p)+$$
$$+4(1-p)(1-q) = 12pq-7p-7q+4.$$

Egyforma ezt a nyereményt maximalizálni, *Másforma* minimalizálni szeretné. E két ellentétes törekvést „békíti" össze a *maximin-elv* és a *minimax-elv:*

Egyforma így okoskodik: *Másforma* viszonylag hamar tud jó becslést adni p-re; egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy pontosan ismeri is. Ekkor olyan q_p-t választ, amelyre

$$12pq_p-7p-7q_p+4 = \min_{0\leq q\leq 1}\,(12pq-7p-7q+4).$$

Ez számomra a legkedvezőtlenebb eset, ezért olyan p-t akarok választani, amelyik ebben a legrosszabb helyzetben a lehető legnagyobb nyereményt biztosítja. Ekkor ugyanis legalább

$$\text{maximin} = \max_{0\leq p\leq 1}\left[\min_{0\leq q\leq 1}\,(12pq-7p-7q+4)\right]$$

nyereményre számíthatok, bárhogy játsszon is *Másforma*.

Határozzuk meg rendre q_p, a maximumot adó p és maximin értékét.