2018.04.14.

Logaritmus feldolgozása

11. osztály, gimnázium

A matematika tanítása4G-tg
Kód: mm5t2ms8g

Készítette: Madarasi Adrienn,
Tóth Tímea Angéla

Tanmenet

Óra száma	Téma	Cél, ismeretanyag	Megjegyzés	Fejlesztési terület/kompetencia	Fogalmak/tételek
1.	Mi az a logaritmus?	A cél az lenne, hogy a diákok már megszerezzenek egy képet a logaritmus fontosságáról, annak mindennapi használatáról. Motiváció szerzés azáltal, hogy önállóan szereznek tapasztalatot, tudást.	Ez egy rendhagyó óra, kérdéses milyen lesz a kimenetele. A következő órák anyagainak érintése.	Digitális és kommunikációs kompetencia, rendszerezési készség fejlesztése. A matematikai fogalomtár bővítése. Matematika hasznosíthatóságának felismerésére vonatkozó képesség fejlesztése.	Jelölés: 10-es alap logaritmus
2.	A logaritmus fogalma I.	Előző óra lezárása. Annak megértése, hogy miért szükséges a logaritmus, illetve a definíció alapos megértése és alkalmazása, a hatványozás, gyökvonás, és a logaritmus közötti összefüggés	A definíció magyarázatára sok időt fordítunk, fontos, hogy mindenki megértse, mert ez lesz a további órák alapja Lehetséges hiba: kikötések	Új fogalom alkotása Rendszerezés Matematika épülésének észrevétele	A logaritmus definíciója (mondattal, egyenlőséggel) logaritmus értelmezhetőségének keretei
3.	A logaritmus fogalma II. Feladatok a logaritmus definíciója alapján	Gyakorlás Logaritmus fogalmának mélyítése	Mind önállóan (pl.: $\log_2 4$), mind kitevőként ($3^{\log_3 4}$) szerepeljen	Elsajátított matematikai fogalom alkalmazása	

4.	A logaritmusfüggvény., a logaritmusfüggvény. és az exponenciális függvény kapcsolata	A logaritmusfüggvény. alapvető tulajdonságainak megismerése, egyszerűbb logaritmusfüggvény-ek felrajzolása	Emelt szinten: a logaritmus és exponenciális függvény kapcsolata (inverz függvények)	Digitális kompetencia fejlesztése (Desmos alkalmazása) Következtetési készség fejlesztése (függvénytranszformációk)	Tulajdonságai: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás Inverz függvény
5.	A logaritmus azonosságai	Azonosságok bizonyításának levezetése Bizonyításban használt lépésekkel rámutatni, hogy a matematika egy komplett egység.	Hatványozás, gyökvonás és logaritmus közötti összefüggések Kiemelni: nincs összeg vagy különbségre vonatkozó.	Következtetési kompetencia fejlesztése Korábban tanult ismeretek összekötésének és annak használatának mélyítése	Szorzat, tört, hatvány logaritmusa
6.	10-es alapú logaritmus Áttérés másféle alapú logaritmusra	10-es alapú logaritmus átismétlése, mert ezt lehet használni a számológépen. Az áttérés rutinszerű alkalmazása, annak felismerése, hogy mikor célszerű áttérni	Fontos megtanulni, hogy a dolgozatban is tudják használni.	Számológép célszerű használatának gyakorlása	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
7.	Természetes alapú logaritmus (kiegészítő tananyag)	e szám megismerése Annak megmutatása, hogy bizonyos alapú logaritmus gyakrabban használunk, mint mást.	Számológépen is megnézni.	Matematika hasznosíthatósága a különböző tudományterületeken (fizika, pénzügy)	ln$x$(logaritmus naturalis) log$x$

8.	Gyakorló óra	Az azonosságok biztos alkalmazása	A következő órákon logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek és szöveges feladatok lesznek, amihez szükséges az előző órai anyagok magabiztos használata, így egy órát azok gyakorlására szánunk	Kapcsolatok keresésére és felismerésére vonatkozó képesség fejlesztése (azonosságok keresése és felismerése)	
9.	Logaritmikus egyenletek	Az egyszerűbb logaritmikus egyenleteket mindenki rutinszerűen meg tudja oldani	Szükségesek az előző órai ismeretek, tulajdonképpen azokat alkalmazzuk Új változó bevezetésének megmutatása Lehetséges hiba: Értelmezési tartomány vizsgálatának elmaradása	Modellalkotási és a problémamegoldó kompetencia fejlesztése Matematika különböző területeinek összekapcsolása (függvény és egyenlet)	Logaritmikus egyenlet fogalma Kölcsönös egyértelműség $\log_a x = \log_a b \Leftrightarrow x = y$
10.	Logaritmikus egyenletrendszerek	Egyszerű logaritmikus egyenletrendszereket mindenki meg tudjon oldani	Az előző órán már kaptak szorgalmi feladatként egy egyenletrendszert	Problémamegoldó kompetencia fejlesztése	
11.	Logaritmikus egyenlőtlenségek	Egyszerű logaritmikus egyenlőtlenségeket mindenki meg tudjon oldani		Következtetési kompetencia fejlesztése (logaritmusfüggvény tulajdonságai és egyenlőtlenség megoldása) Elektronikus eszközök célszerű használata	$\log_a x > \log_a y$ ↙↘ a>1 a<1 ↓ ↓ x>y x<y

12.	A logaritmus gyakorlati alkalmazásai	A szöveges feladatok megoldásának gyakorlása	Talán ez a témakör legfontosabb órája, az előző órák célja az volt, hogy megszerezzék a gyerekek az ehhez szükséges ismereteket	Matematika hasznosíthatóságának felismerése a mindennapokban	
13.	Összefoglaló óra	Minden témakörből nézünk feladatot, hogy még dolgozat előtt kiderüljenek az esetleges félreértések, felfrissítjük az eddigi ismereteket, ezzel könnyebbé tesszük az otthoni felkészülést			
14.	Témazáró dolgozat	Annak kiderítése, hogy mindenki kellő mértékben megértette-e az anyagogot			

Felhasznált irodalom:

- Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika 11, OFI, 2015.

- Kosztolányi József és mtsai., Sokszínű matematika 11., Mozaik kiadó, Szeged, 2010.

- Vancsó Ödön és mtsai., Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki Könyvkiadó, Bp. 2004

Osztály: 11.b, 25 fő, néhányan emeltezni fognak

Előzetes tudás: 10 egész kitevőjű hatványai és használatuk átváltásoknál, hatványozás kiterjesztése, hatványozás azonosságai, négyzetgyökvonás, n-dik gyök fogalma, gyökvonás azonosságai

Óra témája: Ismerkedés a logaritmussal – Érdeklődés felkeltés, motiváció szerzése

Óra típusa: Új fogalom bevezetése

Szemléltető eszköz: ppt használata

Tankönyv: Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika 11, OFI, 2015.

Időkeret	Didaktikai feladat, óra szakasz célja, tevékenységek	Diák kompetenciák	Munkaforma	Oktatási módszer	Eszköz	Tanítandó ismeret, fogalom	Megjegyzés
5 perc	**Ráhangolódás** Ismétlés, új tananyag előkészítése Táblázat kitöltése: Kérdésekre jelentkeznek, helyes válasz esetén kihívom őket, egy kis papírra ráírják a megoldást és kiragasztják.	Matematikai kompetencia (bővülő fogalom készlet) Kezdeményező készség	Frontális osztálymunka Tanulók a táblánál dolgoznak	Munkáltatás	Projektor Ppt (csatolva) Kis papírlapok Íróeszköz (filctoll)	logaritmus fogalma, 10-es alapú logaritmus	
5 perc	**Témakör bevezetése, motiváltság szerzése** Fogalom értelmezése olyan szempontból, hogy miért alakult egyáltalán ki. Matematika történet	Matematikai kompetencia	Frontális	Tanári előadás	Papíron vázlat (mellékleteknél) Ppt	Személyek (nem megtanulandó, de nekem fontos): Simon Stevin, Joost Bürgi, John Napier, Henry Briggs	Diákok ébersége csökkenhet. Sok homályos és még nehezen fogható szó.
5 perc	**Aktivizálás, motiváltság, ismeretbővítés** Fogalom értelmezés és fogalmi jegyek meghatározása önállóan	Önálló tanulás Digitális kompetencia Szövegértési készség fejlesztése	Egyéni munka	Munkáltatás „Feladatlap” kitöltés	Ppt-n a kérdések Saját füzetük		Folyamatosan járkálni kell és ellenőrizni, nehogy nagy butaságot találjanak az interneten

	Logaritmus szó beírása a Google-ba (feladat a ppt-ben)						
5 perc	**Aktivizálás, motiváltság, ismeretbővítés** <u>Fogalom értelmezés és fogalmi jegyek meghatározása párosan</u> Logaritmus szó beírása a Google-ba (feladat a ppt-ben)	Digitális kompetencia Kommunikációs készség	Páros munka (padtárs)	Munkáltatás Megbeszélés Rendszerezés	Ppt-n a feladat Saját füzetük		Felemerülő kérdésekre felelni
20 perc	**Aktivizálás, motiváltság, ismeretbővítés** <u>Fogalom értelmezés és fogalmi jegyek meghatározása csoportosan</u> Logaritmus szó beírása a Google-ba (feladat a ppt-ben)	Kommunikációs készség Esztétikai, művészeti, önkifejezési kompetencia	Kooperatív csoportmunka	Rendszerezés Szemléltetés Kooperatív tanulás	Színes filctollak Kartonlapok	Utolsó 5 percben: prezentálása a plakátoknak. Ki kell ragasztani a plakátokat az osztályterem különböző részein. Csoportonként egy ember marad a plakátnál a többiek pedig forgó színpad szerűen mennek tovább.	Ténylegesen a feladattal foglalkozzanak

5 perc	**Tudományosság, motiválás és szemléletesség** <ins>Új ismeret alkalmazása</ins> A logaritmus alkalmazhatóságának példája	Természettudományos kompetencia Következtetési kompetencia (ábra értése)	Frontális	Tanári előadás, magyarázás, de kérdésekkel	Ppt Ábra „elemzése”		

Mellékletek:

Ppt, ez alapján megy az óra

1. Előadás anyaga (vázlatosan)

- Logaritmus szükségessége: XVI.-XVII. század, élénülő kereskedelem, hosszú hajóutak, fejlődő csillagászat. Eljárás: egyszerűbbé teszi a többjegyű számok szorzását. A kor mérnökei, csillagászai, könyvelői híres számolómesterek.
- Joost Bürgi: svájci óramester, Kepler munkatársa, 1603 és 1611 között állította össze az első logaritmus táblázatot, 1620: *Számtani és mértani haladványtáblázat, részletes útmutatással, hogy miként használhatók ezek mindenféle számításoknál*
- John Napier: skót műkedvelő csillagász, 1614: A csodálatos logaritmusáblázat – a trigonometrikus függvények logaritmusainak nyolcjegyű táblázata, alapszáma: $\frac{1}{e}$, logaritmus elnevezés: logosz=viszony + artimosz=szám
- Henry Briggs: angol matematikus, első 1000 egész szám 10-es alapú logaritmus táblázata 1617-ben. 1624: Arithmetica Logica 1-20000 és 90000-100000 14 jegyig. Briggs-féle logaritmus a 10-es alapú a XX. századig.
- 1827- logarléc

2. Feladat szövege és megoldása

A decibel-skála

Az emberi fül által hallható hangtartomány

Mit láttok a táblázat bal oldalán? Mi a leghalkabb hang? Mi az elnevezése? Mi van a jobb oldalán? Honnan jöhet az elnevezése? Hány nagyságrendet ölelne át a tényleges intenzitás? Kényelmi szempont! Milyen a tényleges intenzitása az utcai forgalomnak? Milyen a beszélgetésnek? És a relatív? A tényleges intenzitást ezzel a képlettel lehet átszámolni.

Feladat: Mekkora a dB-ben kifejezet relatív intenzitása annak a hangnak, amelynek tényleges intenzitása $6{,}31 \cdot 10^{-4}\,\frac{w}{m^2}$?

Megoldás: Helyettesítés.

$L_I = 10 \cdot lg\,\frac{6{,}31\cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \cdot \lg(6{,}31 \cdot 10^{8}) \approx 88$ dB (számológép)

Feladat 2: Egy forgalmas főúton 95 dB-es zajszintet mértek. Ez mekkora tényleges intenzitásnak felel meg?

$95=10\cdot\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ / :10

$9{,}5=\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

Innen, hogyan tovább? Következő óra anyaga. (Logaritmus definíciója.) Hagyjanak ki két sort.

Tankönyvi szöveg: Az emberi fül által még éppen halható, leghalkabb hang $10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ intenzitású, ezt az intenzitást nevezik hallásküszöbnek. A még elviselhető legnagyobb intenzitás $10^{2}\,\frac{W}{m^2}$. Mivel ez 14 nagyságrendű tartományt jelent, kényelmesebb a tényleges helyett a relatív intenzitást, az ún. decibel skálát használni. (Alexander Bell és tized) A táblázat a tényleges intenzitást ($\frac{W}{m^2}$) és a relatívintenzitást (dB) értékét hasonlítja össze.

Egy tényleges intenzitási értéket a következő képlettel számítható át decibel-értékre

$$L_I=10\,\lg\frac{I}{10^{-12}}$$

ahol I a hang tényleges inzenzitása $\left(\frac{W}{m^2}\right)$-ben.

Logaritmikus egyenletek óraterv

1-15. perc

Házi feladat volt: Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

1. $10^{\lg 2+\lg 3}$
2. $6^{\log_6 24-\log_6 4}$
3. $5^{2\cdot\log_5 3+3\cdot\log_5 2}$
4. $(\sqrt{10})^{4\cdot\lg 8-\lg 9}$
5. $3^{\log_9 16-\log_{27} 8}$ Ez csak az emelt szintű érettségire készülőknek volt.

1. Tevékenység. *Óra elején kihívok négy tanulót, hogy írják fel a táblára a múlt órán tanult négy logaritmusazonosságot, kikötésekkel együtt.*

A házi feladatokat a táblánál oldják meg. A házik megoldása után megkérdezem, hogy van-e még valakinek kérdése az azonosságokhoz, ha van, azt megbeszéljük. Vélhetően nem megy még mindenkinek gördülékenyen az azonosságok alkalmazása, ez az óra jó alkalmat teremt azok gyakorlására is.

1. Megjegyzés. *Ha valakinek nem megy az azonosság felírása, megkérdezem, hogy miért. Ha lustaságból nem tanulta meg, akkor megdorgálom érte, viszont ha azért, mert nem értette, felhívom a figyelmét, hogy nagyon figyeljen az órán, és ha még mindig nem érthető, egyeztessünk időpontot, amikor el tudom neki magyarázni.*

Az első négy házihoz gyengébb képességű tanulókat hívok ki. Fontos, hogy az új anyag elkezdése előtt mindenkinek legyen valamennyi némi tapasztalata az azonosságok alkalmazása terén, ezért is szánok ennyi időt házifeladat ellenőrzésre.

Megoldás:

1. $10^{\lg 2+\lg 3} = 10^{\lg 2+3} = 10^{\lg 6}$.
2. $6^{\log_6 24-\log_6 4} = 6^{\log_6 \frac{24}{4}} = 6^{\log_6 6} = 6.$
3. $5^{2\cdot\log_5 3+3\cdot\log_5 2} = 5^{\log_5 3^2+\log_5 2^3} = 5^{\log_5 3^2\cdot 2^3} = 72.$
4. $(\sqrt{10})^{4\cdot\lg 8-\lg 9} = (10^{\frac{1}{2}})^{4\cdot\lg 8-\lg 9} = 10^{2\cdot\lg 8-\frac{1}{2}\cdot\lg 9} = 10^{\lg 8^2-\lg 9^{\frac{1}{2}}} = 10^{\lg\frac{64}{3}} = \frac{64}{3}$.

5. $\log_9 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \frac{\log_3 16}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 16 = \log_3 16^{\frac{1}{2}} = \log_3 4$

$\log_{27} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 27} = \frac{\log_3 8}{3} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 8 = \log_3 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 2$

$3^{\log_9 16 - \log_{27} 8} = 3^{\log_3 4 - \log_3 2} = 2.$

15-30. perc

2. Tevékenység. *Elmondom mit jelent a logaritmikus egyenlet, majd nézünk rá példákat, amelyeket meg is oldunk.*

A feladatok megoldásához három jobb képességű tanulót hívok ki.

A második feladatnál megkérek egy, a megoldótól különböző tanulót, hogy vázlatosan rajzolja fel a fennmaradó táblára a 8-as alapú logaritmusfüggvényt, hogy lássuk, valóban mon. növő-e.

2. Megjegyzés. *Felhívom a figyelmet az értelmezési tartomány megkeresésének a fontosságára. Eleinte lehet nehézséget okoz azt megérteni, hogy miért a metszetét kell venni a tagok értelmezési tartományának, és az is, hogy mi is a metszet.*

Megkérem a megoldókat, hogy hangosan kommentáljanak minden lépést a megoldásnál. Ha nem megy a kihívott tanulónak, segítek neki, illetve megkérem a többi gyereket, hogy akinek van ötlete, mondja.

Miután végzett a megoldó, elmondom én is a megoldás fő lépéseit.

Számegyenesen ábrázoljuk az intervallumokat, amelyek metszete az értelmezési tartományt fogja adni. Ezt mindaddig csináljuk, míg mindenki nem látja anélkül is.

„Definíció” : A logaritmikus egyenlet olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen logaritmusa is előfordul.

1. példa Oldjuk meg a következő logaritmikus egyenleteket:

1. $\log_4(x-2) = 3$
2. $\log_8(3x+4) = \log_8 17$
3. $\log_7(x^2+x) = \log_7(10-2x)$.

Megoldás:

1. Csak $x - 2 > 0$ esetén értelmezett az egyenlet, vagyis $x > 2$. A logaritmus definíciója miatt $x - 2 = 4^3 \Rightarrow x = 66$. Ez része az értelmezési tartománynak, és tényleg megoldás.

2. Csak $3x + 4 > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$ esetén értelmezett az egyenlet. A 8 alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt két kifejezés logaritmusa acsa egyenlő, ha a kifejezések is egyenlőek, tehát $3x + 4 = 17 \Rightarrow 3x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$. A kapott megoldás része az értelmezési tartománynak, és ellenőrizhető, hogy valóban megoldás.

3. Csak akkor van értelmezve az egyenlet, ha $x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1$ vagy $x > 0$ és $10 - 2x > 0 \Rightarrow 5 > x$. Ezeket egybevetve $x < -1$ vagy $0 < x < 5$.

   A 7 alapú logaritmusfüggvény szigorú növekedése miatt

$$x^2 + x = 10 - 2x$$
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

   $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

   Mindkét eredmény eleme az értelmezési tartománynak, és visszahelyettesítve őket látható, hogy valóban megoldások.

30-43. perc

3. Tevékenység. *Páros munkában oldják meg a feladatokat. Ahol a pár egyik tagja sem tudja, odamegyek segíteni.*

Ha már nagyjából mindenki kész az elsővel, a táblára felírja valaki (nem én) a megoldást és elmagyarázza. Így tovább minden feladatra. Valószínűleg nem fog az időbe beleférni, amire nem marad idő, az házi marad.

3. Megjegyzés. *Úgy vannak ültetve a matematikaórákon, hogy egy jobb és egy kevésbé jóképességű tanuló ül egymás mellett, így páros munkánál, ha valaki a tanári magyarázatot nem értette, az a társától lehet megérti.*

2. példa Oldjuk meg a következő logaritmikus egyenleteket:

1. $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 15$
2. $\lg(x+13) - \lg(x+17) = \lg 10 - \lg 7$
3. $2 \cdot \lg_3(x-1) = \lg_3 4$

megoldás:

1. $x > 0$ esetén van csak értelmezve. A bal oldal a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság alapján átírható $\log_2(x \cdot 3) = \log_2 15$. A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, így $3x = 15$, $x = 5$. Ez benne van az értelmezési tartományban, és ellenőrizhető, hogy tényleg megoldás.

2. Az értelmezési tartomány vizsgálat két részből áll: $x+13>0 \Rightarrow x>-13$ és $x+7>0 \Rightarrow x>-7$. Ezek metszete $x>-7$. A hányados logaritmusára vonatkozó azonosság miatt így írható az egyenlet:

$$\lg\frac{x+13}{x+7}=\lg\frac{10}{7}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt:

$$\frac{x+13}{x+7}=\frac{10}{7}$$

$\Rightarrow 7x+91=10x+70 \Rightarrow x=7$. Ez része az értelmezési tartománynak és tényleg megoldás.

3. Értelmezési tartomány: $x-1>0 \Rightarrow x>1$. A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján $\log_3(x-1)^2=\log_3 4$. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $(x-1)^2=4 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$. Az értelemzési tartomány miatt csak $x_1=3$ megoldás, és ezt behelyettesítve látható, hogy tényleg megoldás.

Utolsó 2 perc:

4. Tevékenység. *Ha valaki nem boldogul egyedül a házival, kérjen segítséget olyantól, akinek megy. Nem büntetem a kooperációt, de azt kikötöm, hogy értse meg a segítséget kérő, ne csak lemásolja a füzetébe.*

4. Megjegyzés. *Ezen feladatokban mindhárom, középszintre kellő azonosság előfordul, így ezzel tudják mindet gyakorolni. Nem tartom jónak a túl sok házi feladat adását, mert egyrészről, ha látják, hogy kevesebb van, szivesebben nekikezdenek, másrészről pedig van még a matematikán kívül egy csomó órájuk amiből szintén kapnak házit és mindezeket azután kell megcsinálniuk, hogy viszonylag későn érnek haza az iskolából.*

Házi feladat:

1. $\lg(10x-2)-2\lg(x+1)=\lg 2$
2. $\lg\sqrt{x-2}-\lg x-5+\lg 2=0$
3. $\lg_3(x-1)-\lg_3(6x-5)+\lg_3(2-3x)=2$

megoldás:

1. Csak akkor értelmezett az egyenlet, ha $10x-2>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5}$ és $x+1>0 \Rightarrow x>-1$. Mindkettőnek kell teljesülni, tehát $x>\frac{1}{5}$.

A hányados és a hatvány logaritmusának azonosságát alkalmazva:

$$\lg \frac{10x-2}{(x+1)^2} = \lg 2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $\frac{10x-2}{(x+1)^2} = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$. Mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, és ezek tényleg megoldások.

2. Csak akkor van értelme az egyenletnek, ha $x-2>0 \Rightarrow x>2$ és $x-5>0 \Rightarrow x>5$. Vagyis $x>5$ esetén értelmezett az egyenlet. A bal oldalt az azonosságok segítségével átírva, a bal oldalon felhasználva, hogy $\lg 1 = 0$:

$$\lg \frac{2\sqrt{x-2}}{x-5} = \lg 1.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $\frac{2\sqrt{x-2}}{x-5} = 1$. Szorozzunk át, emeljünk négyetre és rendezzük nullára az egyenletet:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-2} &= x-5 \\ 4(x-2) &= x^2-10x+25 \\ x^2-14x+33 &= 0 \end{aligned}$$

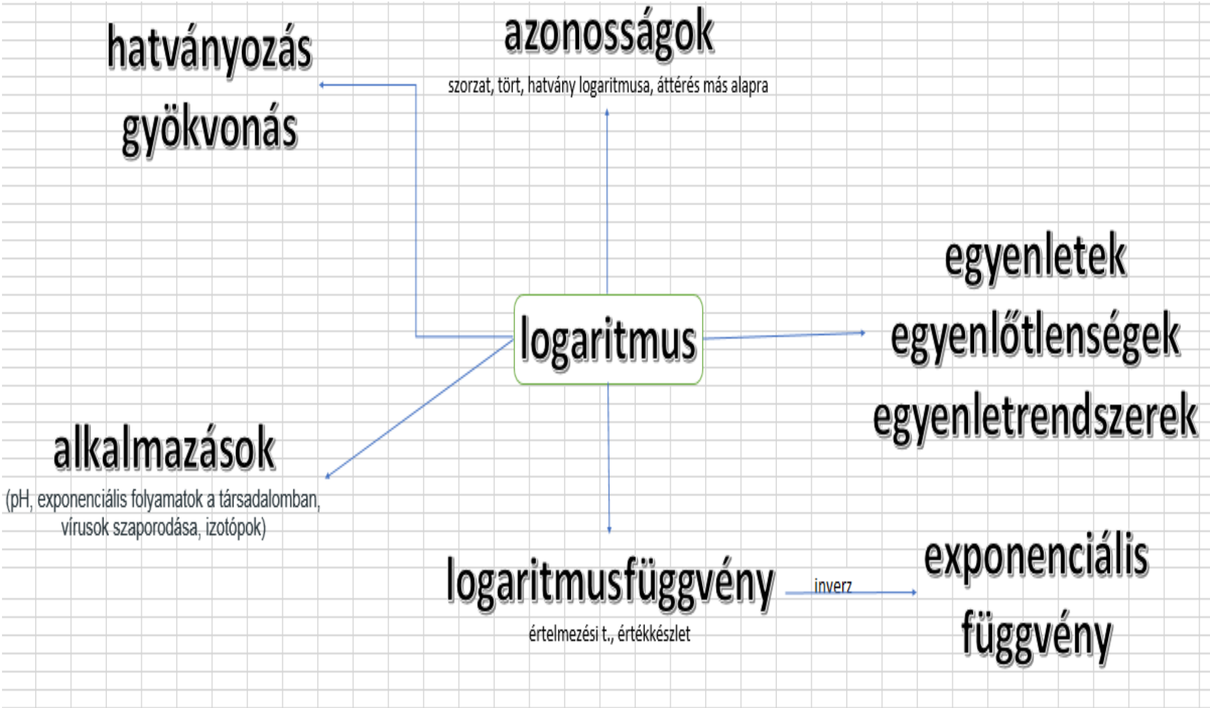
Ebből $x_1 = 3$, $x_2 = 11$. Az értelmezési tartománynak csak a 11 eleme, és ez tényleg megoldás.

3. Az egyenlet akkor van értelmezve, ha $x-1>0 \Rightarrow x>1$ és $6x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{6}$ és $2-3x>0 \Rightarrow \frac{2}{3}>x$. Ezek metszete üres, így nincs megoldása az egyenletnek.

Szorgalmi: Oldjátok meg a következő logaritmikus egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_3 y &= 2 + \log_3 2 \\ \log_{12} \frac{x}{y} &= 1. \end{aligned}$$

Fogalmi háló:



Témazáró dolgozat

Logaritmus és alkalmazásai

1. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat! Írd mindet olyan alakra, hogy ne tartalmazzon logaritmust!

$\log_3 9$ $\lg\sqrt[4]{1000}$ $\log_2\frac{1}{4}$ $9^{\log_3 2}$ $0{,}25^{\log_2 3}$ $\log_{0,1} 1000$

Megoldás: $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ $\lg\sqrt[4]{1000} = \lg\sqrt[4]{10^3} = \lg 10^{\frac{3}{4}} = 0{,}75$

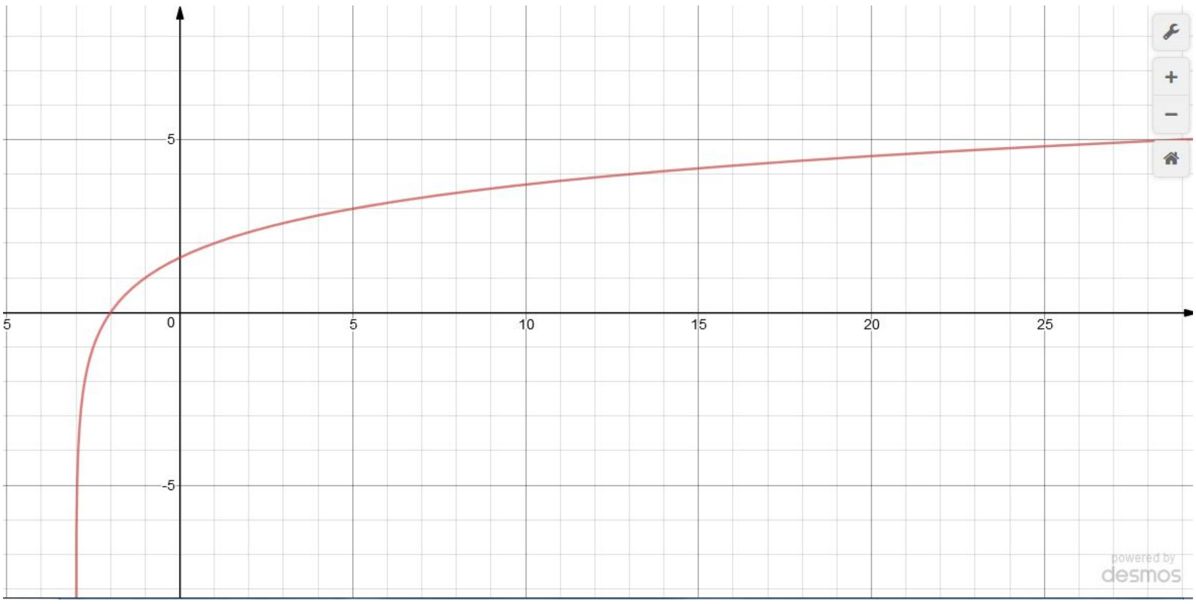
$\log_2\frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$ $9^{\log_3 2} = (3^2)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = 4$

$0{,}25^{\log_2 3} = (2^{-2})^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ $\log_{0,1} 1000 = \log_{0,1} 10^3 =$
$\log_{0,1} 0{,}1^{-3} = -3$

Sorrend: $\log_{0,1} 1000 < \log_2\frac{1}{4} < \log_2\frac{1}{4} < \lg\sqrt[4]{1000} < \log_3 9 < 9^{\log_3 2}$

Minden szám logaritmus nélküli felírásáért 0,5 pont, és a növekvő sorrendért 1 pont jár, összesen 4 pont.

2. a) Ábrázold és jellemezd a következő függvényt: $f(x) = log_2(x+3)$! Add meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, monotonitását és zérushelyét!



Értelmezési tartomány: (-3,∞)

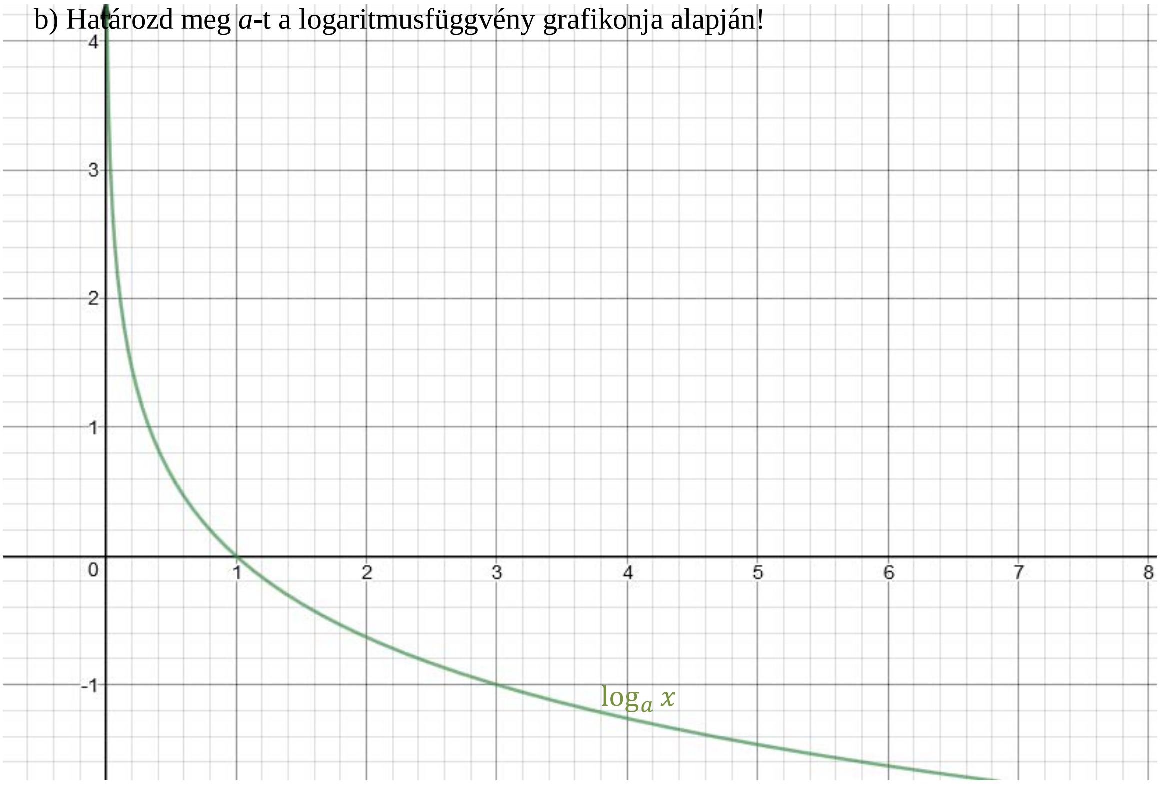
Értékészlet: ℝ

Zérushely: -2

Monotonitás: szig. mon. nő

A függvény helyes ábrázolásáért 1 pont, az értelmezési tartomány és értékkészletért 1 pont, a monotonitás megállapításáért 1 pont, a zérushelyért 1 pont jár. Összesen 4 pont.

b) Határozd meg a-t a logaritmusfüggvény grafikonja alapján!



Megoldás: $a = \frac{1}{3}$ (1 pont)

3. Oldjátok meg a követező logaritmikus egyenleteket!

$$\log_3(x+3) = \log_3 8 - \log_3 2$$
$$\log_5(2x-1) = 2$$

megoldás: 1. Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x + 3 > 0$, vagyis $x > -3$. Az egyenletet átalakítjuk, kihasználva a logaritmusok különbségére vonatkozó azonosságot, majd a 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedését.

$$\log_3(x+3) = \log_3 8 - \log_3 2$$
$$\log_3(x+3) = \log_3 \frac{8}{2}$$
$$\log_3(x+3) = \log_3 4$$
$$x+3 = 4$$
$$x = 1$$

Ez a megoldás eleget tesz a kikötésbeli feltételnek.

Pontozás: Összesen 4 pont (1 pont a kikötésért, 1 az azonosság helyes alkalmazásáért, 1 pont annak megállapításáért, hogy a 3-as alapú logaritmusfv szigorúan monoton növő, így az egyenlet felírható logaritmus nélkül, 1 pont a helyes eredményért és a visszautalásért a kikötésre (ha ez nem történik meg, de az derül ki, hogy elfogadja az eredményt, akkor is jár a pont).

2. Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $2x-1>0$, vagyis $x>\frac{1}{2}$. A logaritmus definícióját használva, majd x-re rendezve az egyenletet, megkapjuk a megoldást, ami eleget tesz a feltételnek.

$$\log_5(2x-1) = 2$$
$$5^2 = 2x-1$$
$$x = 13$$

A feladat 3 pontot ér, 1 pont a kikötés, 1 pont a definíció használata, és 1 pont a megoldás a visszaellenőrzéssel együtt (akkor is, ha a visszaellenőrzésre nem utal más jel, csak az, hogy elfogadja a megoldást).

4) A vizes oldatok pH-értéke a $\left(\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}\text{-ben mért}\right)$ hidroxónium-ion-koncentráció 10-es alapú logaritmusának -1-szerese. Semleges kématásnak nevezzük a 7-es pH-értéket, az ez alattit savasnak, az e fölöttit lúgosnak.

a) Milyen kémhatású a reklám szerint „öt-pont-ötös" (valójában: 5,5-es) pH-jú tusfürdő?

b) Mekkora ebben a tusfördőben a hidroxónium-ion-koncentráció?

Megoldás:

a) 5,5<7, tehát savas (1 pont)

b) Ha x a koncentráció, akkor$-\,lg\,x = 5{,}5$, azaz $x = 10^{-5{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-6}\ \left(\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}\right)$. (3 pont)

5) Jelen pillanatban 100 vírus található egy beteg szervezetében, és számuk óránknt megduplázódik. Becsüljük meg, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a vírusok száma elérje a 10 000-et!

Megoldás:

Exponenciális egyenlet felírása:

f(x): vírusok száma x idő függvényében

$f(x) = 100 \cdot 2^x$ (1 pont)

Kérdés: $100 \cdot 2^x = 10000$ / osztok 100-zal (1 pont)

$2^x = 100$ /veszem mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát

$\log_2(2^x) = \log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2}$ (áttérés új alapra)

$x \approx 6{,}64$ (2 pont)

Válasz: 7 óra múlva már biztosan elérte a vírusok száma a 10000-et. (1 pont)

Ponthatárok:

0 – 9 pont -→ 1-es

10 – 14 pont -→ 2-es

15 – 18 pont -→ 3-as

19 – 21 pont -→ 4-es

22 – 25 pont -→ 5-ös

	$10^3=1000$		
Hogy hívjuk?			
Írj a helyére x-et!			
Mit teszünk hogy megkapjuk az eredményt?			

És ilyenkor mi van?

$$10^x=2856$$

$10^x = 2856$

x = 10-es alapú logaritmus 2856 = $\log_{10} 2856$

Mai óra témája:

Ismerkedés a logaritmussal

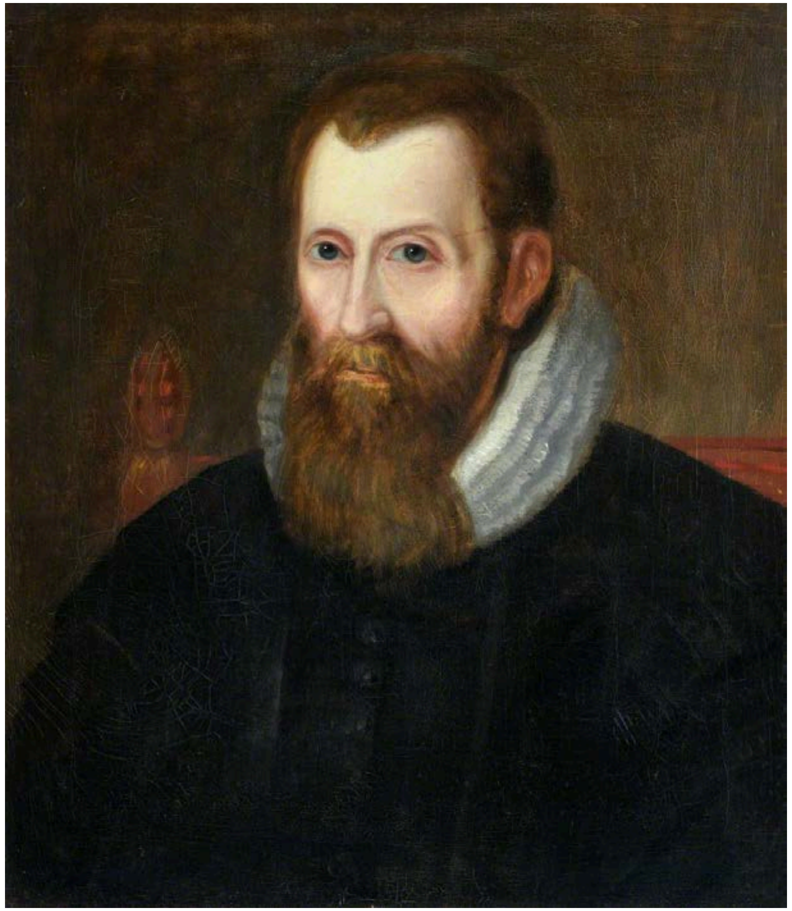
Minek kellett az a fránya logaritmus?

- XVI-XVII. század: élénkülő kereskedelem, hosszú hajóutak, fejlődő csillagászat
- A kor mérnökei, csillagászai, könyvelői híres **számolómesterek**

Minek kellett az a fránya logaritmus?

- Joast Bürgi: svájci óramester, 1603-1622, Kepler munkatársa
- Számításokban segített a műszerek javítása mellett
- Gyorsabban el tudja végezni a műveletet, ha nem a megadott számokkal, hanem azok bizonyos szám hatványaival felírt alakjával dolgozik, így szorzási műveletekből összeadás!
- Eredményeit táblázatba

Minek kellett az a fránya logaritmus?



- John Napier: skót műkedvelő csillagász
- 1614: A csodálatos logaritmustáblázat
- Szögfüggvény értékek logaritmusait
- Logaritmus elnevezése is hozzá kapcsolódik

Minek kellett az a fránya logaritmus?

- Henry Briggs: angol matematikus
- első 1000 egész szám 10-es alapú logaritmus táblázatba 1617-ben
- 1624: Arithmetica Logica 1-20000 és 90000-100000 14 jegyig.
- Briggs-féle logaritmus a 10-es alapú a XX. századig.

Feladat

- Egyéni munka
- Írd be a Google keresőjébe a logaritmus szót! Jegyzetelj ki róla a füzetedbe 4-5 adatot, amit találsz. Legalább 3-4 honlapot használj! (Ne csak a Wikipédiát please)
- 5 perced van rá

Feladat

- Páros munka
- Padtársaddal vessétek össze, miket találtatok! Próbáljátok meg közösen megfogalmazni, hogy mi az a logaritmus, mire alkalmazható, illetve mi érdekes vele kapcsolatban. (Például: honnan jön a neve?)
- Használhatjátok továbbra is az internetet
- 5 perc

Feladat

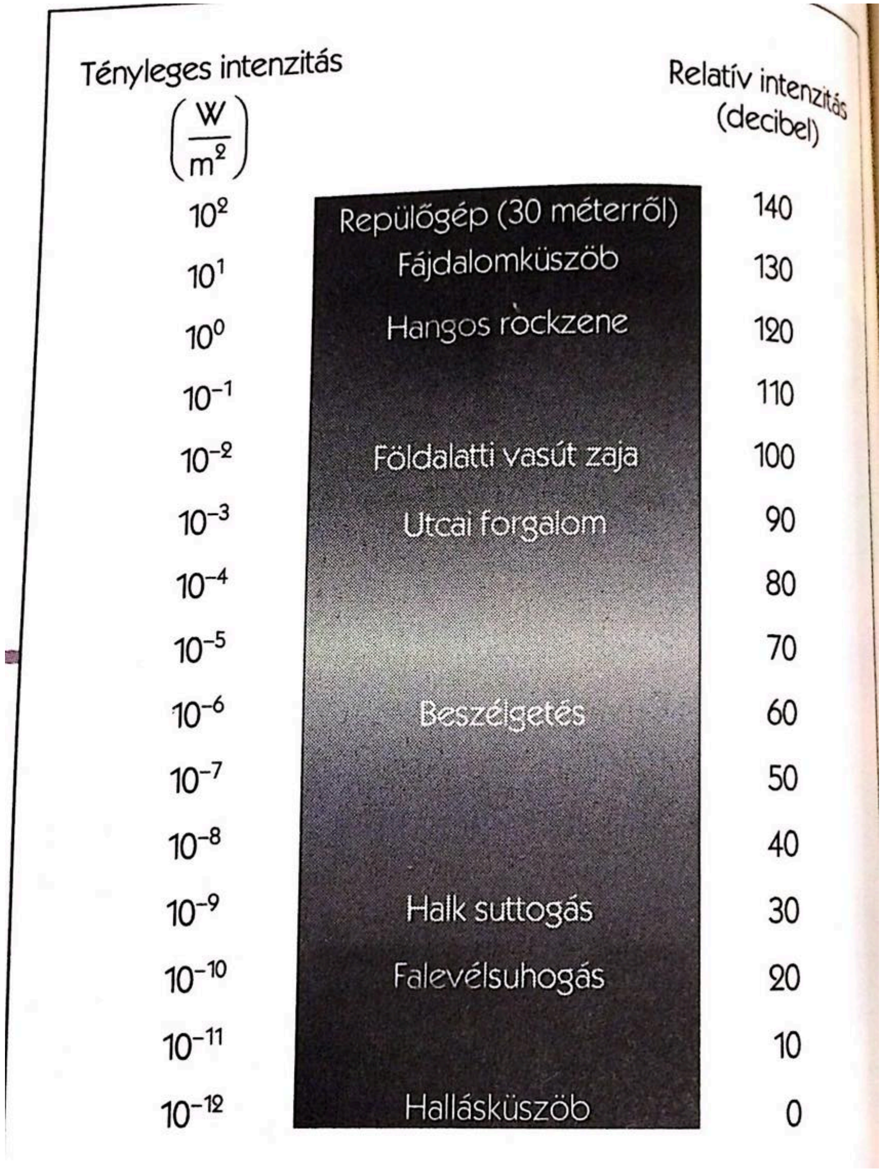
- Alkossatok 4-5 fős csoportokat és készítsetek „plakátot” a logaritmusról (akár lehet „reklám” is, de akár ismeretterjesztő vagy a logaritmus egészének egy része)!
- Szerepeljen rajta ezek közül legalább 3:

1. Mi az a logaritmus? Hogyan jelöljük? Hogyan mondjuk ki?
2. Írjatok le egy példát konkrét számokkal, hogy mit jelent!
3. Keressetek az interneten olyan képletet, amiben szerepel!
4. Milyen eszközökkel lehet ma és lehetett régebben logaritmust számolni?
5. Keressetek személyt, aki összefügg a logaritmussal! (Elhangzott is lehet, de akkor plusz információt kérek)

+1. Ezt kötelezően: valami, amire nem kérdeztem rá

- 10 perc

A decibel-skála



Tényleges intenzitás $\left(\frac{W}{m^2}\right)$		Relatív intenzitás (decibel)
10^{2}	Repülőgép (30 méterről)	140
10^{1}	Fájdalomküszöb	130
10^{0}	Hangos rockzene	120
10^{-1}		110
10^{-2}	Földalatti vasút zaja	100
10^{-3}	Utcai forgalom	90
10^{-4}		80
10^{-5}		70
10^{-6}	Beszélgetés	60
10^{-7}		50
10^{-8}		40
10^{-9}	Halk suttogás	30
10^{-10}	Falevélsuhogás	20
10^{-11}		10
10^{-12}	Hallásküszöb	0

Közös feladat

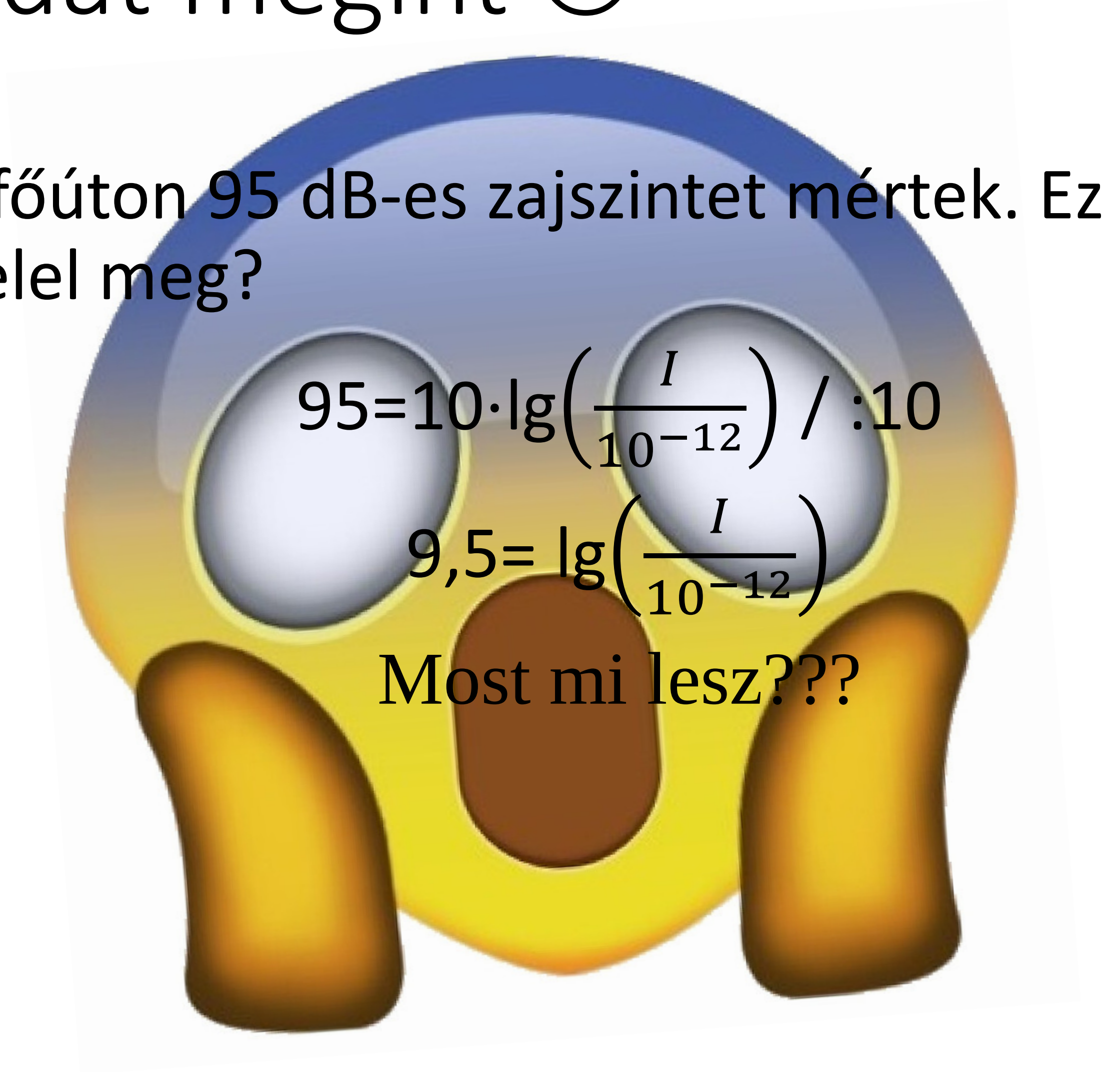
Mekkora a dB-ben kifejezet relatív intenzitása annak a hangnak, amelynek tényleges intenzitása $6{,}31 \cdot 10^{-4}\,\frac{w}{m^2}$?

Megoldás: Helyettesítés.

$L_I = 10 \cdot lg\,\frac{6{,}31 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}$ = $10 \cdot \lg(6{,}31 \cdot 10^8) \approx 88$ dB (számológép)

Közös feladat megint ☺

Egy forgalmas főúton 95 dB-es zajszintet mértek. Ez mekkora tényleges intenzitásnak felel meg?



$$95=10\cdot \lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \ / :10$$

$$9{,}5= \lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

Most mi lesz???