Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

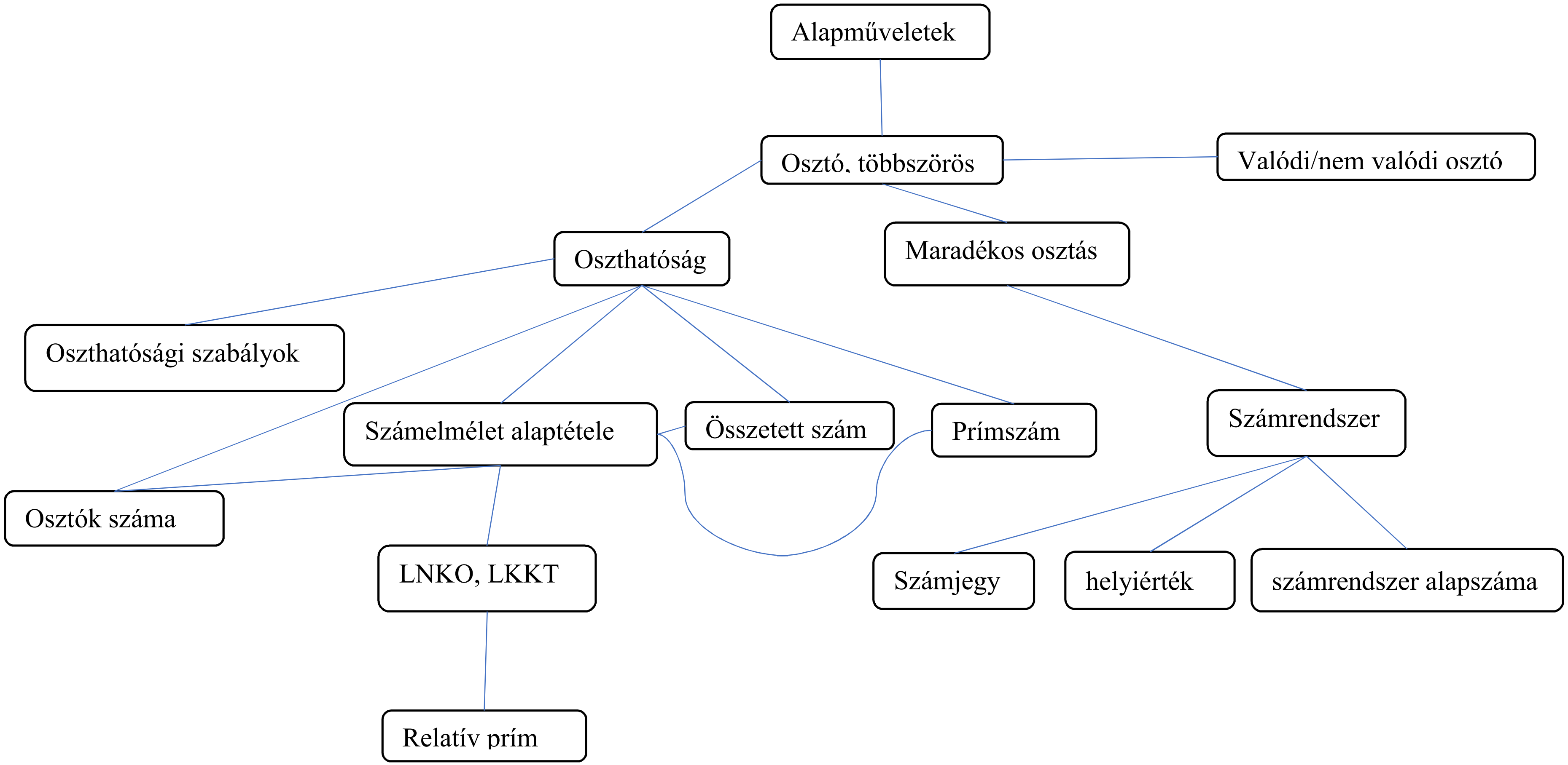
Számelmélet: számrendszerek, oszthatóság, prímszámok

Téma: Számelmélet
Évfolyam: 9. osztály
Osztály típusa: emelt óraszámú gimnázium
Felhasznált irodalom:

- 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 5. melléklete – kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára
- Dr. Fried Katalin, Dr. Gerőcs Lácsló, Számadó László: Matematika; A középiskolák 9. évfolyama számára
- Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, dr. Szászné Simon Judit: Matematika 9.; Az érthető matematika
- Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9
- Dr. Nyakóné dr. Juhász Katalin, Dr. Terdik György, Biró Piroska, Dr. Kátai Zoltán: Bevezetés az informatikába
- Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sok-színű matematika 9.
- Róka Sándor: Számelmélet

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Fogalmi háló



Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Tanmenet

Témák órákra bontása	Az óra témája	Az óra céljai, fejlesztési területei	Ismeretanyag
1.	Oszthatóság	A korábban tanult fogalmak felelevenítése, jelentésük elmélyítése. Azt oszthatóság néhány fontos részletes átbeszélése. Ezek alkalmazása feladatmegoldásban.	Oszthatóság, maradékos osztás, osztó, többszörös, valódi és nem valódi osztó
2.	Oszthatósági szabályok	2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 8-cal, 9-cel, 11-gyel való oszthatóság szabályainak átismétlése, elmélyítése a maradékok segítségével. Ezek alkalmazása feladatmegoldásban. (számolások ellenőrzése oszthatósági szabályokkal)	Osztási maradék, oszthatóság
3.	Prímszámok	Prímszám, összetett szám fogalmának átismétlése. A prímszámok néhány tulajdonsága. Erathosztenészi szita, végtelen sok prímszám van. (Prímszámok a titkosításban, ikerprímsejtés, Csebisev)	Prímszám, összetett szám, végtelen sok prím
4.	A számelmélet alaptétele	A számelmélet alaptételének megértése, fontosságának érzékeltetése (példa olyan számkörre, ahol nem igaz: párosország). A számelmélet alaptételének alkalmazása a gyakorlatban	Számelmélet alaptétele, prímtényezőkre bontás
5.	Osztók száma	Megfigyelés alapján megsejtése az osztók számának, indoklása a kombinatorika felhasználásával. (Tökéletes számok)	variáció, osztó, számelmélet alaptétele, prímtényezőkre bontás
6.	Gyakorlás	Az eddig tanult és átismételt fogalmak elmélyítése, (együttes) alkalmazása	Eddig használt fogalmak

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Témák órákra bontása	Az óra témája	Az óra céljai, fejlesztési területei	Ismeretanyag
7.	LNKO, LKKT, relatív prím	Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös, relatív prímek fogalmának átismétlése két számra, jelentésük elmélyítése, meghatározása a prímtényezős alakból. A fogalmak kiterjesztése kettőnél több számra. ($\sqrt{(n)} \notin \mathbb{Q}$, ha $n \neq k^2$)	LNKO, LKKT, relatív prím
8.	Gyakorlás	Az eddig tanult és átismételt fogalmak, tulajdonságok elmélyítése, (együttes) alkalmazása	Eddig használt fogalmak
9.	Számrendszerek	Számrendszerek fogalmának megértése, átváltás 10-esből adott számrendszerbe, illetve vissza. (Számrendszerek mindennapi jelenléte – tucat, óra, nap, informatika, …)	Maradékos osztás, számrendszer, helyiérték, számjegy, alapszám
10.	Számrendszerek	Átváltás különböző számrendszerek között, azonos számrendszerbeli számokkal való egyszerű számolások (kapcsolat az informatikával – kettes komplemensű ábrázolása az egész számoknak)	Maradékos osztás, maradékok, számrendszer, helyiérték, számjegy, alapszám
11.	Gyakorlás, felkészülés a dolgozatra	Tanult ismeretek rendszerezése, a legfontosabb részek kiemelése	Minden a témakör folyamán tanult, alkalmazott ismeret
12.	Dolgozat	Tanult ismeretek alkalmazása	Minden a témakör folyamán tanult, alkalmazott ismeret
13.	Dolgozat értékelése	A dolgozatban nyújtott teljesítmény tanulságainak, hiányosságainak megbeszélése	Minden a témakör folyamán tanult, alkalmazott ismeret

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Óraterv 1. - Oszthatósági szabályok

Idő	Tevékenység	Leírás	Munkaforma
8 perc	Köszönés, adminisztráció, házi feladat ellenőrzése	Az előző órán feladott feladatok megbeszélése. A diákok elmondhatják a feladatmegoldást a táblánál plusz pontért. A feladatok az oszthatóság fogalmához és az oszthatóság definíciójából következő tulajdonságokhoz kapcsolódnak.	Frontális munka
10 perc	Ráhangoló feladat	http://www.logikaifeladatok.hu/jatekok/gondolat.html A csodagömb játék kipróbálása (közösen, majd egyénileg okostelefonon) és a trükk leleplezése.	Frontális munka - Plénum Egyéni munka
7 perc	Oszthatósági szabályok átismétlése	Milyen számjegy állhat az 123x4 számban az x helyén, ha a szám osztható a) 3-mal; b) 9-cel; c) 4-gyel; d) 8-cal; e) 11-gyel; e) 6-tal; f) 5-tel; g) 2-vel; h) 24-gyel? A feladat megoldása során átbeszéljük az oszthatósági szabályokat, kitérünk a maradékokra is. Lehetséges segítő kérdések: Mikor osztható egy szám 3-mal, 9-cel, 4-gyel, 8-cal stb.? Ha nem osztható egy számmal, mi lehet a maradék? (pl.: 5-nél)	Frontális munka - Plénum

Idő	Tevékenység	Leírás	Munkaforma
15 perc	Oszthatósági szabályok gyakorlása	Néhány gyakorló feladat megoldása és megbeszélése a feladatlapról. A feladatok megbeszélésének sorrendje: 2., 3., 5., 6. Erről tájékoztatjuk a diákokat is. Először feladatmegoldás, az egyes pároknak igény esetén segítségnyújtás, majd megbeszélés. A diákok kijöhetnek a táblához plusz pontért. Ezek feltétlen sorra kerülnek, míg a csillaggal jelölteket házi feladatként kellene megoldaniuk. A kimaradtak elméletében hasonlóak a korábbiakhoz, de igényelhetnek új ötleteket is. A két csillaggal jelölt egy nehezebb, gondolkodtató feladat, amely érdekes problémát vet fel. A diákok szorgalmiként gondolkozhatnak rajta. Emelt szinten szükséges a differenciálásra lehetőséget biztosítani, ezért tartalmaz több és különböző nehézségű feladatokat a feladatlap.	Feladat megoldása: Páros munka Feladat megbeszélése: Frontális munka - Plénum
5 perc	Matematikatörténeti mese, érdekesség	9-es, 11-es próba, számolások ellenőrzése. Helyesek-e az alábbi szorzások? 7.654.321 • 1.234 = 9.445.432.114 1.234.567 • 4.321 = 5.334.564.007	Frontális munka

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Feladatsor:

1. Milyen számjegy állhat az *123x4* számban az *x* helyén, ha a szám osztható
   a. 3-mal
   b. 9-cel
   c. 4-gyel
   d. 8-cal
   e. 11-gyel
   f. 6-tal
   g. 5-tel
   h. 2-vel
   i. * 24-gyel
   j. * 72-vel
   k. * 7-tel?
2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek megfelelő sorrendjével fel lehet-e írni 6-jegyű prímszámot?
3. Bizonyítsuk be, hogy $10^n - 1$ minden természetes szám esetén osztható 9-cel!
4. * Igazoljuk, hogy 3 egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal!
5. Ugyanazzal az egész számmal osztva az 1200, 1640 és az 1960 számokat, maradékul sorra 3-at, 2-t, illetve 7-et kapunk. Mi lehetett az osztó?
6. Legalább hány tojás van a kosárban, ha a tojásokat hármasával kirakva megmarad 2 tojás, ha a tojásokat négyesével rakjuk ki, akkor 3 tojás marad meg, és ha ötösével rakjuk sorba, akkor 4 tojás marad ki?
7. ** Minden diák gondol egy négyjegyű számra, leírja a szám "fordítottját", és kiszámolja a két szám különbségét. A kapott eredmény egy 0-tól különböző számjegyét letörli, és megmondja a többi számjegy összegét. Ebből én megmondom a letörölt számjegyet. (Példa: A gondolt szám 1999, fordítottja 9991. A különbség 7992. A diák letörli a 2-est és csak annyit mond 25 (=7+9+9). Erre a válaszom: 2.)

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Óraterv 2. - Számrendszerek

Idő	Tevékenység	Leírás	Munkaforma
8 perc	Köszönés, adminisztráció, házi feladat ellenőrzése, videó előkészítése	Az előző órán feladott feladatok megbeszélése. A diákok elmondhatják a feladatmegoldást a táblánál plusz pontért. A feladatok a korábbi órák témaköreiből kerül ki, mintegy az eddig tanultak összefoglalása képpen, hiszen az előző óra gyakorló óra volt. Az oszthatósági tulajdonsággal és maradékos osztással kapcsolatban biztosan megbeszélésre kerülnek feladatok, hiszen ezen az órán erősen használni fogjuk ezeket.	Frontális munka
4 perc	Bevezetés a számrendszerek világába egy kis matematikatörténeti kapcsolattal	Videó megtekintése: https://zanza.tv/matematika/szamtan-algebra/szamrendszerek-helyiertekes-irasmod 2:15-ig. A végén részletezzük az informatikában használatos számrendszereket, ezek hasznosságát. Megemlítésre kerülhet Neumann János és a "Neumann-elv". Ajánlott olvasmány: A számolás története, a számrendszerek kialakulása; A számítástechnikában használatos számrendszerek	Frontális munka
6 perc	Áttérés más számrendszerre	Videó megtekintése: https://zanza.tv/matematika/szamtan-algebra/szamrendszerek-helyiertekes-irasmod 2:58 – 3:51-ig. A videó után a helyiértéktáblázat és az eljárás megbeszélése táblánál, annak belátása, hogy ez miért működik. Megoldás: • $55 = 27 \cdot 2 + 1$, kialakult 27 "kettes" csoport és megmaradt 1 egyes.	Videó megtekintése, megbeszélése: Frontális munka Gyakorló feladat: Frontális munka - Plénum

		• $27 = 13 \cdot 2 + 1$, kialakult 13 "kétszer kettes" csoport és megmaradt 1 kettes. • $13 = 6 \cdot 2 + 1$, kialakult 6 "kettes kétszer kettes" csoport és megmaradt 1 "kétszer kettes" csoport. • $6 = 3 \cdot 2 + 0$, kialakult 3 "kétszer kétszer kétszer kettes" csoport és megmaradt 0 "kétszer kétszer kettes"csoport. Gyakorló feladat: Írjuk fel a 485-öt hatos számrendszerben!	
5 perc	Visszatérés 10-es számrendszerbe	Videó megtekintése: https://zanza.tv/matematika/szamtan-algebra/szamrendszerek-helyiertekes-irasmod 04:20 – 04:51-ig. A videó után az eljárás megbeszélése és gyakorló feladat megoldása. Gyakorló feladat: Keressük meg az 101101 kettes számrendszerbeli szám tízes számrendszerbeli alakját!	Videó megtekintése, megbeszélése: Frontális munka Gyakorló feladat: Frontális munka - Plénum
20-22 perc	Gyakorló feladatok megoldása	Az órához készült feladatlapról néhány feladat megoldása. Az órán megbeszélésre kerülnek az 1.a), b); 2.c), d); 3.; 4.; és 5. feladatok. Az 5. feladat megbeszélésénél kimondjuk, hogy tetszőleges alapú számrendszerben az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal való oszthatóság a számjegyekkel való oszthatóságtól függ, azaz pontosan akkor teljesül, ha a számjegyek összege osztható az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal. (Ez segítséget ad a 7. feladathoz.) A diákok először az 1.a), b); 2.c), d); 3. feladatokat oldják meg páros munkában, ezután ezek megbeszélésre kerülnek. Majd a 4. feladaton gondolkoznak, illetve kerül megbeszélésre, végül az 5. feladattal ugyanígy járunk el. Ha a diákok nem tudnak elindulni	Feladatmegoldás: Páros munka Megbeszélés: Frontális munka - Plénum

		a feladatmegoldásban, adhatunk nekik kezdő lépést, amely után még gondolkozhatnak. A feladatmegbeszélésnél a diákok elmondhatják a megoldásaikat a táblánál plusz pontért. A csillaggal jelöltek házi feladatok. Ajánlott program: http://www.besi.hu/oktp/ A program gyors bemutatása.	

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Feladatok

1. Írjuk át az alábbi tízes számrendszerbeli számokat a megadott alapú számrendszerbe!
   a. 47-et 7-es alapú számrendszerbe;
   b. * 129-et 4-es alapú számrendszerbe;
   c. * 6457-et 2-es számrendszerbe;
   d. 29-et 8-as számrendszerbe.
2. Írjuk át a következő számokat tízes számrendszerbe!
   a. 45321_6
   b. 100011101_2
   c. 505_9
   d. 1201_{12}
3. Melyik számrendszerben lehet $807 = 3423_x$?
4. Mi lehet a 2-vel való oszthatóság szabálya a különböző számrendszerekben?
5. Mi lehet a 8-as számrendszerben a 7-tel való oszthatóság szabálya?
6. * Mi lehet a 6-os számrendszerben az 5-tel való oszthatóság szabálya?
7. * Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
   a. 4532_6 osztható 5-tel;
   b. 210111_3 osztható 2-vel;
   c. 23011_8 osztható 7-tel;
   d. 12121_4 osztható 3-mal.
8. * Rendelkezésünkre áll 1 kg-os, 2 kg-os, 8kg-os és 16 kg-os tömegekből egy-egy darab és egy kétkarú mérleg. Milyen tömegű tárgyakat tudunk mérni, ha az ismert tömegeket az egyik serpenyőbe helyezzük?

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Dolgozat

Minden feladathoz írjatok indoklást, illetve, azt is hogy hogyan gondolkoztatok.

1. Matrózok, akik jó barátok voltak, egy szigeten kincset találtak: 48 egyforma ezüst tálkát, 72 egyforma ezüst hamutartót és 100 egyforma igazgyöngyöt. Nagy szerencséjük volt, mert éppen annyian voltak, hogy mind a háromféle ajándékon igazságosan tudtak osztozni. Legfeljebb hány matróz oszthatta szét a kincseket?
2. Meg lehet-e választani úgy az a és b számjegyeket, hogy $45 \mid 3a72b$ és $36 \mid 3a72b$?
3. – Mit kapsz, ha megszorzod a hatot kilenccel?
   – Hatszor kilenc. Negyvenkettő.
   – Ennyi. Ennyi az egész.
   – Mindig is tudtam, hogy valami alapvető gond van a világban.

   (Részlet: Galaxis útikalauz stopposoknak – Ford és Arthur párbeszéde)

   Milyen számrendszerben lehet igaz a számítás?
4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik helyes! Ha úgy gondolod, hogy igaz, akkor indokold meg, hogy miért, ha pedig úgy gondolod, hogy nem igaz, akkor mutass egy ellenpéldát!
   a. $6 \mid x, 5 \mid x$ és $11 \mid x \Rightarrow 330 \mid x$
   b. $13 \mid 120x \Rightarrow 13 \mid x$
   c. $12 \mid x^2 \Rightarrow 12 \mid x \Rightarrow 144 \mid x^2$
   d. $15 \mid xy \Rightarrow 15 \mid x$ vagy $15 \mid y$
5. Nagymama karácsonyra 6 tepsi mazsolás kalácsot sütött, majd a tepsiket kirakta az asztalra hűlni. Minden tepsin 6 kis kalács volt, minden kalácsot 6 szeletre vágott és minden szeletbe 6 szem mazsola jutott. A fia elvitt egy tepsinyi kalácsot, a lánya a maradékból egy kalácsot, a veje egy szelet kalácsot és a kisunokája a maradék szeletek egyikéből egy szem mazsolát. Hány mazsola maradt az asztalon összesen?
6. Igazoljuk, hogy ha $11 \mid 2a + 3b + 4c$, akkor $11 \mid 8a + b + 5c$.

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Dolgozat értékelése

1. feladat

Az, hogy a matrózok igazságosan el tudták osztani a kincseket azt jeleni, hogy
a matrózok száma osztója az egyes kincsek számának, (1 pont)
azaz a három szám legnagyobb közös osztóját keressük (1 pont)
Bontsuk prímtényezőkre a számokat!
A $48 = 2^4 \cdot 3$ (1 pont)
A $72 = 2^3 \cdot 3^2$ (1 pont)
A $100 = 2^2 \cdot 5^2$ (1 pont)
Ezek alapján a legnagyobb közös osztójuk: $2^2 = 4$ (1 pont)
Tehát legfeljebb 4 matróz osztozkodhatott a kincseken. (1 pont)

2. feladat

45-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha osztható 5-tel és 9-cel. (1 pont)
5-tel oszthatóság miatt b már csak 0 vagy 5 lehet. (1 pont)
9-cel oszthatóság miatt, ha b=0, akkor a=1 lehet csak, ha b=5, akkor a=6. (1 pont)
36-tal pontosan akkor osztható egy szám, ha osztható 4-gyel és 9-cel. (1 pont)
Ez alapján b=0;4;8 lehet. (1 pont)
Elég a b=0 esettel foglalkozni. 9-cel oszthatóság miatt a=6 lehet. (1 pont)
A megoldás tehát a=6, b=0. (1 pont)

3. feladat

Ha a számrendszer alapja x, akkor a 42 a következőt jelenti
(10-es számrendszerbe visszafordítva): $4x + 2$ (2 pont)
Így a következőnek kell teljesülnie: $6 \cdot 9 = 4x + 2$ (1 pont)
ez alapján $54 = 4x + 2$,
amiből $x = 13$. (1 pont)
Tehát 13-as számrendszerben tényleg igaz lesz a számítás és ez jó is, mert a számrendszer alapja tényleg nagyobb felhasznált számjegyeknél. (1 pont)

4. feladat

a. Igaz, mert a 6, 5 és 11 relatív prímek. (1+1 pont)
b. Igaz, mert a 13 nem osztja a 120-at. (1+1 pont)
c. Hamis, ellenpélda x=6. (1+1 pont)
d. Hamis, ellenpélda x=3 és y=5. (1+1 pont)

5. feladat

A mazsolákat mindig hatosával tesszük egy nagyobb kupacba, ezért gondolhatunk a számukra 6-os számrendszerbeli számként is, ahol az egyes helyiértékek a tepsi, kalács, szelet, mazsola száma (1 pont)

Ekkor a mazsolák száma kezdetben: 10000_6 db mazsola (1 pont)

Fia után maradt: $10000_6 - 1000_6 = 5000_6$ db mazsola (1 pont)

Lánya után maradt: $5000_6 - 100_6 = 4500_6$ db mazsola (1 pont)

Veje után maradt: $4400_6 - 10_6 = 4450_6$ db mazsola (1 pont)

Unokája után maradt: $4450_6 - 1_6 = 4445_6$ db mazsola (1 pont)

Tehát összesen $5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^3 = 1037$ (1+1 pont)

6. feladat

Ha $11 \mid 2a + 3b + 4c \rightarrow 11 \mid 4(2a + 3b + 4c) = 8a + 12b + 16c.$ (1 pont)

Mivel $11 \mid 11(b + c) = 11b + 11c,$ (1 pont)

így $11 \mid 8a + 12b + 16c - 11b - 11c = 8a + b + 5c.$ (1 pont)

Ponthatárok

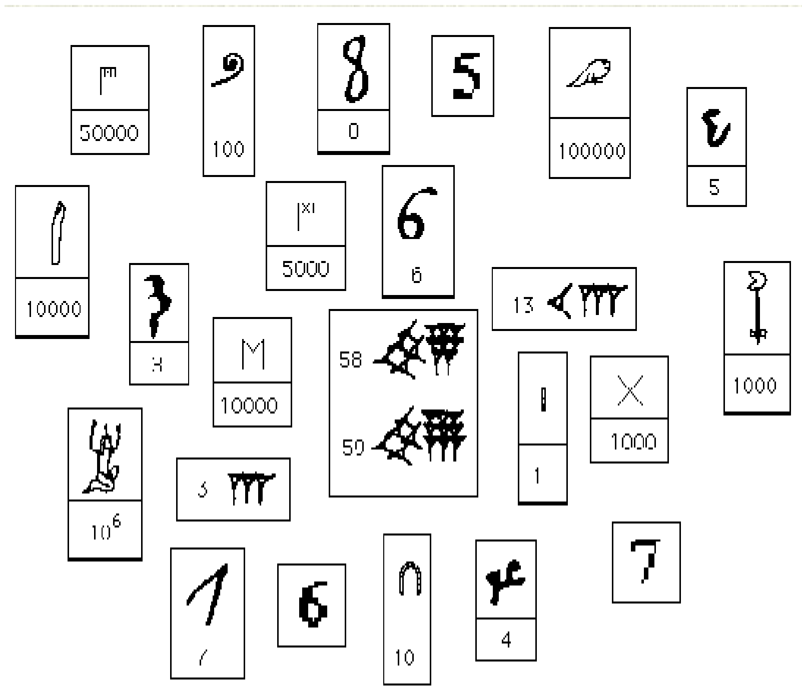
30-38.... 5
23-29.... 4
15-22.... 3
9-14.... 2
0-8.... 1

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Melléklet – ezek alapján lehet kiegészíteni az órákat történeti információkkal

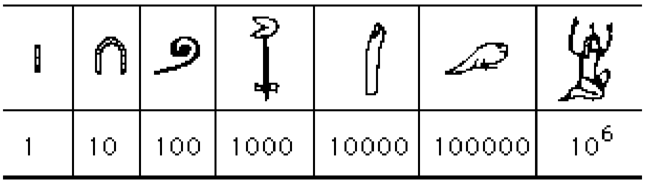
A számolás története, a számrendszerek kialakulása

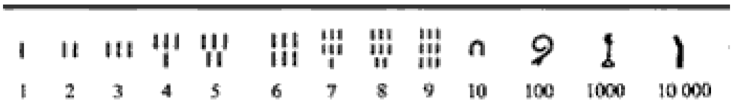
Ma Magyarországon arab számokat használunk, és tízes számrendszerben számolunk. De a történelem ennél többféle számrendszert és különböző írásmódokat ismer. Ezekből ad ízelítőt az alábbi ábra:



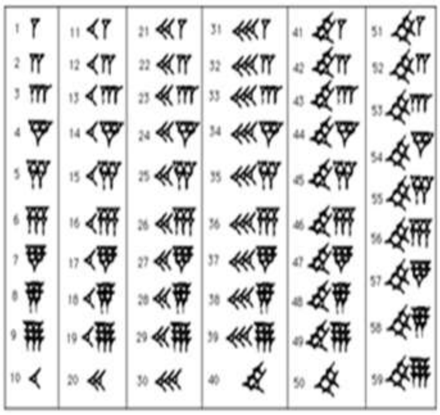
Az ősember az ujjait használta a számoláshoz. (Az ujj latin neve digitus, innen származik a számjegy angol digit neve.) Nagyobb számok kezelésére az ókorban köveket használtak. (A kövecske latin neve calculus, innen származik a mai kalkulátor szó.)
Egyiptomban az i.e. 2000 körüli időkben már jól kialakult tízes számrendszer volt, melynek elterjedését a mezőgazdaság és a csillagászat szükségletei mozdították elő. Minden magasabb tízes egységre külön jelet használtak, tehát a helyi érték fogalmát még nem ismerték. Egy pálcika: 1; két pálcika: 2; három pálcika: 3; és így tovább. Egy hajtű: 10; két hajtű: 20; három hajtű: 30; és így tovább. Egy csavar: 100; két csavar: 200; három csavar: 300; és így tovább.

Egy lótuszvirág: 1000; két lótuszvirág: 2000, és így tovább, millióig. A milliót a csodálkozó, térdeplő emberalak fejezte ki. Ezek a jelek láthatók az alábbi ábrán:



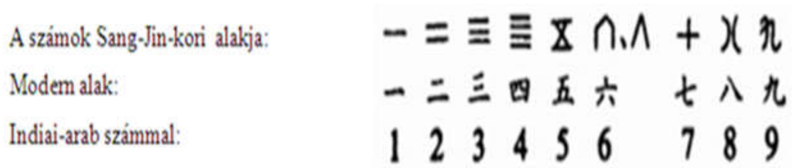


Mezopotámiában, a késői sumér korszakban, ahol a csatornázás és építkezés bonyolult számítást kívánt, fejlett helyi értékes hatvanas számrendszert találunk, amely még árulkodik az előző tízes számrendszer használatáról, hiszen 1-től 60-ig a régebbi tízes számrendszer segítségével írták le a számjegyeket. Ékírásos jeleiket agyagba nyomták, az agyagtáblát tüzes kemencében kiégették, s ezzel olyan időtállóvá tették azt, hogy csak meg kell találni a táblát, megfejteni az ékírás titkát, és az az idők végezetéig olvasható marad. Egy agyagtábla képét és a számok ékírásos megfelelőit láthatjuk az alábbi ábrán:

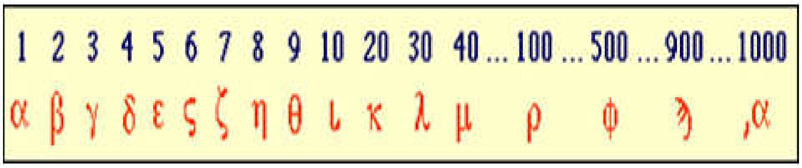


A számolásra utaló legrégibb kínai jelek az i.e. XIV. - XI. századból származó – jósláshoz használt – csontokon, valamint az i.e. X. - III. századi cserép- vagy bronztárgyakon és pénzeken maradtak fenn, és nem helyi értékes, de tízes számrendszerről tanúskodnak. A számpálcikás számrendszer a tízes alapú helyi értékes rendszerek legrégebbike, azonban az ebből kialakult írásbeli rendszert nem egészítették ki a nulla jelével, ezért a számítások többségét még a papír feltalálása után is számolótáblán végezték. Az idők folyamán többször átdolgozott és kibővített kínai matematikai értekezés, a Matematika kilenc könyvben VIII. könyvében a tudomány történetében először találkozunk a pozitív és negatív számok megkülönböztetésével, és itt fogalmazták meg a negatív számokkal végzett műveletek legegyszerűbb szabályait is. A táblázat pozitív elemeit piros pálcikákkal ábrázolták, a negatívokat feketével. Az ábrázolás ilyen módját a könyvnyomtatásban is alkalmazták. Régi számábrázolási formákat láthatunk az alábbi ábrán:

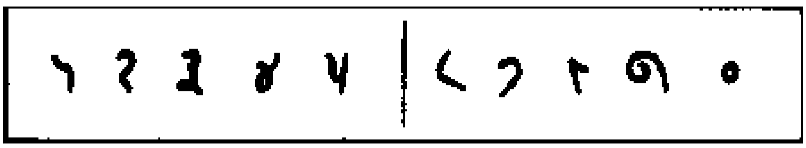
Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes



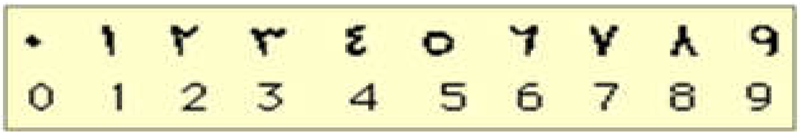
Az ókori görögök számírása az i.e. V. század tájékán nem helyi értékes tízes számrendszerben történt. Az első 9 számjegyet ábécéjük első 9 betűje, a 9 darab tízest a következő 9 betű, és a 9 százast a további 9 betű jelentette. A 999-nél nagyobb számok leírására betű-számjegyeik mellett külön jeleket használtak. Ilyen alfabetikus számjegyírást találunk az ószláv, a héber és az arab népeknél is:



Tízes számrendszerre használatára utalnak a római számjegyek is. A tízes számrendszerre mutató 1, 10, 100 és 1000 jeleket kibővítették az 5, 50 és 500 jelével, így az általuk használt számjegyek:
I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000,
amelyekből a többi számot a következő módon tudták előállítani: a számok írásánál az egymás mellé írt egyenlő jegyeket össze kell adni; az egymás mellé írt különböző jegyeknél a kisebb számot a nagyobbhoz kell adni, ha ettől jobbra áll, és levonni belőle, ha balra áll tőle. Például: IX=10-1=9, XI=10+1=11.
Mivel a rómaiak nem ismerték a számok helyi értékét, a nagy számok leírása kényelmetlen, és a számolás reménytelenül nehéz volt.
Az indiai népek legnagyobb tudományos és általános kultúrtörténeti vívmánya a helyi érték elvén alapuló tízes számrendszer megteremtése volt, amelynek kiteljesedése hosszú időt vett igénybe, és még távolról sem ismert fejlődésének minden állomása. Az indiai számolási mód már ősidők óta tízes alapú volt, bár egyes időszakokban és egyes vidékeken a négyes alapszám nyomai is megtalálhatók. A mi arab számjegyeket használó helyi értékes tízes vagy dekadikus számrendszerünk arab közvetítéssel, de Indiából származik. A régi tízes számrendszer és a helyi érték használata itt forrt össze, valószínűleg a III. - IV. században. Brahmagupta-hoz fűződik a kis körrel jelölt 0 feltalálása és használata a számok írásmódjában (lásd a következő ábra), valamint a negatív számokkal végzett műveletek kiterjesztése is az ő műveiben szerepel először.



Az ősmagyarok a történelmi időkben már tízes számrendszert használtak. Ez azonban az előző idők hatos és hetes számrendszerén át, hosszú fejlődés eredménye volt. A hetes számrendszerre lehet következtetni például a mesék hétfejű sárkányáról, a hetedhét országról, a hét rőf hosszú szakállról, a hétmérföldes csizmáról, a hétpecsétes titokról. A később keletkezett nyolc és kilenc számneveinkben a szóvégi c, régiesen írva z, valószínűleg a tíz számnév végződése. Ebből úgy sejtjük, hogy a nyolcat és a kilencet a tízből származtatták őseink. A nyelvészeti kutatások szerint a finnugor nyelvekben közös gyökere van a két, három, négy, öt, hat és száz tőszámneveknek. Ezek kialakulásakor még a finnugor népek együtt voltak és hatos számrendszert használtak. A hét számnév már a szűkebb ugor családra utal (magyar, vogul, osztják). E népek nyelvében a hét szó nemcsak számnév, hanem jelenti a hétnapos időtartamot is. Az ősi rovásírás számjegyei és azok írásmódja (lásd a következő ábra) már a tízes számrendszerre utalnak. Nemcsak a számok alakját, hanem elnevezését is az indiaiaktól vették át. Később az arab számok alakja folyamatosan változott.



Egy számrendszer (vagy számábrázolási rendszer) egységes szabályok alapján határozza meg, hogy a számjegyek sorozata milyen számokat jelenít meg. Például, a tízes számrendszer azt jelenti, hogy egy adott mennyiség kifejezésekor a csoportosítást 10-esével végezzük. Először tízes csoportokat hozunk létre az adott mennyiségből, majd az így kapott csoportokat is tízesével csoportosítjuk mindaddig, amíg újabb nagyobb csoport létrehozható. Ebből elsősorban az következik, hogy 10 különböző jelet kell használnunk a számok leírására: a 0-t a „nem maradt” kifejezésére, az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jeleket pedig a csoportosításból kimaradt 9 lehetséges állapot jelzésére. A lényeges újítás abban állt, hogy a számjegyek a helyüktől függően más értéket vesznek fel. Az első csoportosítás végén megmaradtak száma kerül a szám jobb szélére, tőle balra a második csoportosítás végén megmaradtak száma, és így tovább.
A számrendszerek lényegét a helyi érték fogalma alapján lehet megérteni. A szám értékét úgy kapjuk, hogy az egyes számjegyek értékét szorozzuk a helyi értékükkel, és mindezt összeadjuk.

A számítástechnikában használatos számrendszerek

A számítástechnikában leggyakrabban a tízes (decimális, p = 10), a kettes (bináris, p = 2) és a tizenhatos (hexadecimális, p = 16) számrendszerrel dolgozunk. A kettes számrendszerben csak kétféle jelet használunk (0,1), míg a tizenhatosban 16 különbözőt, ezért betűkre is szükség van (0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F). Az alábbi táblázat mutat néhány példát a különböző alapú számrendszerekre:

Bináris p=2	Tetrális p=3	Kvantilis p=5	Oktális p=10	Decimális p=10	Duodecimális p=12	Hexadecimális p=16
0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2
11	10	3	3	3	3	3
100	11	4	4	4	4	4

Készítette: Csepregi-Horváth Zsófia, Csikai Ágnes
Kurzus: A matematika tanítása 4G
Oktató: Dr. Wintsche Gergely

Bináris p=2	Tetrális p=3	Kvantilis p=5	Oktális p=10	Decimális p=10	Duodecimá-lis p=12	Hexadeci-mális p=16
101	12	10	5	5	5	5
110	20	11	6	6	6	6
111	21	12	7	7	7	7
1000	22	13	10	8	8	8
1001	100	14	11	9	9	9
1010	101	20	12	10	a	A
1011	102	21	13	11	b	B
1100	110	22	14	12	10	C
1101	111	23	15	13	11	D
1110	112	24	16	14	12	E
1111	120	25	17	15	13	F
10000	121	26	20	16	14	10

A tízes számrendszer alkalmazása a más területen való mindennapi használatból nyilvánvaló. A kettes számrendszer használata a digitális számítógép tulajdonságaiból adódik. A tizenhatos számrendszer pedig a tömörebb írásmódot teszi lehetővé, hiszen szoros kapcsolatban van a kettes számrendszerrel. A tizenhatos számrendszer számjegyei négy kettes számrendszerbeli számjeggyel írhatók fel, ugyanis $2^4 = 16$.

Kettes számrendszer	Tizenhatos számrendszer	Tízes számrendszer
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15

A számokat különböző számrendszerekben írhatjuk fel. A q alapú számrendszerből p alapúba történő átszámolásnál az egész részt p-vel való osztással, a tört részt p-vel való szorzással határozzuk meg.

9-es, 11-es próba

Róka Sándor: Számelmélet - 9-es, 11-es próba