1. 1867-ben a csőd szélén álló orosz kormány eladta Alaszkát az amerikaiaknak. 7 200 000 dollárt fizettek, kb. 1 718 000 km^2 hideg, fagyott földért. Akkoriban mindenki hatalmas ostobaságnak vélte ezt az üzletet. Ez kb. 4,2 dolláros volt négyzetkilométerenként.

a) Ha az évenkénti átlagos pénzromlás üteme 3% lett volna, akkor mennyit érne ma a terület egy négyzetkilométere?

b) Mekkora lenne az érték 4%-os átlagos infláció esetén? Hányszoros különbséget eredményezne a végösszegben ez az egyetlen százalék változás?

2. *Mily összeget kell tőkésíteni, hogy az 5½%-ra évenkint 308 frtot kamatozék?*

3. *Valamely 25 millió frtra rugó államadósságnak évi kamatja 1125000 frt; mily nagy a %?*

4. *Valaki minden év első napján 200 Ft-ot tesz letétbe 21 éven keresztül. Mekkora összeg áll rendelkezésére a 21. év végén, ha az évenkénti kamatláb az egész idő alatt 5%, és a kamatokat évenként tőkésítik?*

5. *Egy apa oly módon kívánja gyermekét biztosítani, hogy az 25 éves korától kezdve 15 éven át évi előleges 1500 Ft-ban részesüljön. Mekkora összeget kell evégből a gyermek születésekor a takarékba tenni, ha az összetett kamatok kamatlába 4%?*

1. a) 1867-óta 145 év telt el. Az ár tehát $1{,}03^{145} \approx 72{,}7$ szeresére nőtt volna ez alatt, és az ár $72{,}7 \cdot 4{,}2 \approx 305{,}34$ $/km²$.

b) évi 4%-os inflációt feltételezve $1{,}04^{145} \approx 295$ szeresére nőtt a terület értéke, az ár $295 \cdot 4{,}2 \approx 1197$ \$/km^2.

Azaz egy százaléknyi változás a 145 év során több mint 4-szeres változást okoz, hiszen $295 / 72{,}7 \approx 4$.

2. Az eredeti mintamegoldás 1876-ból:

5½ frt kamatot kapunk	100 frt tőke után
1 frt kamatot kapunk	100 frt : 5½ = $\frac{200}{11}$ frt tőke után
308 frt kamatot kapunk	$\frac{200}{11}$ frt × 308 = 5600 tőke után.

Ma így írnánk fel: $x \cdot \dfrac{5{,}5}{100} = x \cdot 0{,}055 = 308$, azaz $x = \dfrac{308}{0{,}055} = 5600$ Ft.

3. Az évi kamat: $\dfrac{1125000}{25000000} = 0{,}045$, azaz 4,5%.

4. Ebben a feladatban egy mértan sor összegét kell meghatározni.

Évenként számolva egy szemléletes, de nem könnyen kezelhető összeget kapunk

$$(\ldots((200 \cdot 1{,}05 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Az 1. év} \\ \text{végén}}}{} + 200) \cdot 1{,}05 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A 2. év} \\ \text{végén}}}{} + \ldots + 200) \cdot 1{,}05 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A 21. év} \\ \text{végén}}}{}$$

A szorzásokat elvégezve és rendezve egyrészt egy könnyedén összegezhető mértani sort kapunk, másrészt észrevehetjük, hogy az egyes évenkénti befizetések gyakorlatilag különálló tagokként kezelhetők.

$$200 \cdot 1{,}05^{21} + 200 \cdot 1{,}05^{20} + \ldots + 200 \cdot 1{,}05^{1} =$$

$$200 \cdot 1{,}05 \cdot (1{,}05^{20} + \ldots + 1) = 200 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{21} - 1}{1{,}05 - 1} \approx 7501{,}04$$

A felhalmozódott összeg körülbelül 7500 Ft.

5. Ez már egy kicsit összetettebb feladat. Jelöljük az apa által elhelyezett összeget *T*-vel. A gyermek 25 éves korára ez az összeg

$$T \cdot 1{,}04^{25}$$

Ekkor azonban rögtön ki is fizetnek belőle 1500 Ft-ot, hiszen a kifizetések előlegesek. A maradék tőke tovább kamatozik, majd a következő 14 évben is kifizetnek belőle 1500-1500 Ft-ot, mikor is a tőke elfogy.

$$(\ldots(T \cdot 1{,}04^{25} - 1500) \cdot 1{,}04 - 1500) \cdot 1{,}04 \ldots) \cdot 1{,}04 - 1500 = 0$$

$$T \cdot 1{,}04^{39} - (1500 + 1500 \cdot 1{,}04 + \ldots + 1500 \cdot 1{,}04^{14}) = 0$$

$T \cdot 1{,}04^{39} = (1500 + 1500 \cdot 1{,}04 + \ldots + 1500 \cdot 1{,}04^{14}) = 1500 \cdot \dfrac{1{,}04^{15} - 1}{1{,}04 - 1}$ Az egyenletet rendezve adódik, hogy $T \approx 6506{,}28$ Ft.

Káin és Ábel, a két gyerek hasonlóan látott neki a feladat megoldásának, de a gyermek 25 éves korára írták fel a befizetett és a visszakapott pénzmennyiségek egyenlőségét. A gyermeknek a 25. szülinapján kifizetnek 1500 Ft-ot. A 26. szülinapján is, de ez egy évvel korábban csak $\dfrac{1500}{1{,}04} = 1442{,}31$ Ft-ot ért.

Hasonlóan felírva a kifizetett 1500 Ft-ok sorát, kapjuk hogy

$$T \cdot 1{,}04^{25} = 1500 + \frac{1500}{1{,}04} + \frac{1500}{1{,}04^{2}} + \ldots + \frac{1500}{1{,}04^{14}}$$

Az egyenletet rendezve és megoldva ugyanazt a végeredményt kapták, mint édesapjuk.

(Az első megoldásában minden pénzmennyiséget a legutolsó kifizetés idejére kamatoztatott fel. A gyerekek megoldásában a befizetett tőkét kamatoztatták, a kifizetett pénzmennyiségeket pedig diszkontálták, azaz kiszámították egy korábbi pillanatban a kifizetések értékét.)