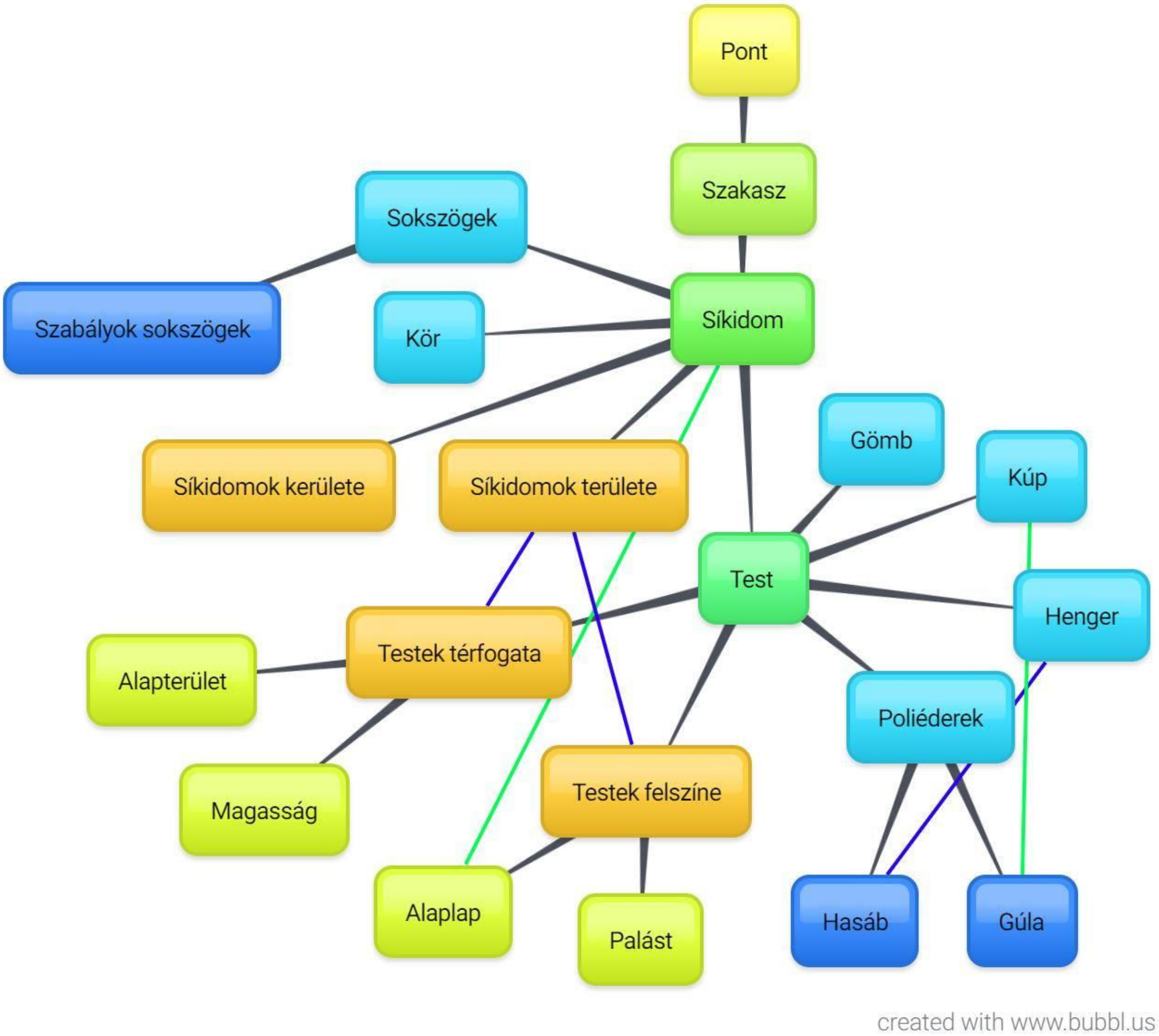
Térgeometria

Tanmenetrészlet

Készítette: Fidelné Móricz Anna Réka, Földesi Dávid, Orosz Cintia
Kurzus: A matematika tanítása4G
Oktató: Wintsche Gergely



Tanmenetrészlet

Az óra száma	**Az óra témája**	**Az óra célja, fejlesztési területei**	**Ismeretanyag**
1	Néhány síkidom kerülete, területe - ismétlés	A szükséges síkgeometriai ismeretek felidézése	Négyzet, téglalap, paralellogramma, háromszög, szabályos sokszögek kerülete, területe
2	Kör és részeinek területe, kerülete - ismétlés	A körről korábban tanultak felelevenítése	Kör kerülete, területe, ívhossza, körcikk, körszelet kerülete, területe
3	Poliéderek	A poliéderek és tulajdonságaik megismerése, illetve a szabályos testek felismerése	Szabályos és általános poliéderek, részeik, felszínük, a térfogat általános definíciója
4	Hasáb és henger felszíne, térfogata	A hasáb és henger tulajdonságainak megismerése; felszín- és térfogatképlet megismerése	Hasáb és henger tulajdonságai, felszíne, térfogata, hasábok fajtái
5	Testátlók és szögek	A hasábokban található nevezetes vonalak és szögek kiszámítása, térlátás fejlesztése	Térelemek távolsága, egyenes és sík, két sík hajlásszöge, poliéder éle, lap- és testátlója
6	Gyakorlás	Az eddig tanultak elmélyítése gyakorló feladatok segítségével	A korábbi órákon elsajátított fogalmak
7	**A gúla felszíne, térfogata**	**A gúla tulajdonságainak megismerése, származtatása; felszín- és térfogatképlet megismerése**	**A gúla tulajdonságai, térfogata, felszíne; Thalész: a piramis magassága**
8	A kúp felszíne, térfogata	A kúp tulajdonságainak megismerése, származtatása; felszín- és térfogatképlet megismerése	A kúp tulajdonságai, térfogata, felszíne
9	Csonkagúla, csonkakúp felszíne, térfogata	A csonka testek származtatása, illetve tulajdonságaik; felszín- és térfogatképlet megismerése	A csonkagúla és csonkakúp tulajdonságai, térfogata, felszíne

Az óra száma	**Az óra témája**	**Az óra célja, fejlesztési területei**	**Ismeretanyag**
10	Gömb és síkmetszetei	A gömb és részeinek, illetve tulajdonságainak megismerése	A gömb definíciója, síkmetszetei, azok tulajdonságai
11	Gömb felszíne, térfogata	A gömb felszín- és térfogatképletének megismerése	A gömb felszíne, térfogata; Arkhimédész: A gömbről és a hengerről
12	Gyakorlás	Az eddig tanultak elmélyítése gyakorló feladatok segítségével	A korábbi órákon elsajátított fogalmak
13	**Összefoglalás, gyakorlás**	**A témában tanult fogalmak, ismeretek rendszerezése, elmélyítése feladatokon keresztül**	**A korábbi órákon elsajátított fogalmak**
14	Dolgozat	A tanultak számonkérése	A témában szerzett ismeretek
15	Dolgozat értékelése, feladatok megbeszélése	A dolgozat tanulságainak megtárgyalása, esetleges hiányosságok pótlása	A témában szerzett ismeretek

A gúla felszíne, térfogata

Óravázlat a 7. órához

Idő	Tevékenység	Leírás	Munkaforma
7 perc	Üdvözlés, adminisztráció, házi feladat ellenőrzése	Köszönés, hetes jelentése. A problémás házi feladatok közös megbeszélése.	Frontális
13 perc	Rávezető feladat	Érdekes történet, hogy Thalész hogyan mérte meg a piramisok magasságát. Csoportba rendeződés. Feladat: a tanár ad 1-1 gúlát minden csoportnak, majd megvilágítják (akár a telefonjuk segítségével vagy a tanár visz lámpát) felülről, és megmérik a magasságát.	Frontális és csoportmunka
6 perc	A téma konkrét bevezetése	A gúla tulajdonságainak megbeszélése, összekötve az előző feladat alapján szerzett tapasztalatokkal. Szabályos gúla.	Frontális és plénum
4 perc	A gúla térfogata	A gúla térfogatának a képletének ismertetése és szemléltetése egy példán keresztül.	Frontális
4 perc	A gúla felszíne	A gúla felszínének a képletének ismertetése és szemléltetése egy példán keresztül.	Frontális
9 perc	Gyakorlás	A megtanult ismeretanyag alkalmazása feladatokon keresztül.	Egyéni munka
2 perc	Elköszönés, házi feladat kiosztás	A gyakorlásból megmaradt feladatok a házik.	Frontális

Gyakorló feladatok:

1. Egy gúla alaplapja 10 és 12 cm oldalhosszúságú téglalap, minden oldaléle 13 cm. Mennyi a gúla felszíne és térfogata?
2. Egy szabályos gúla térfogata 1000 cm^3, az alaplapja 6 cm oldalú szabályos hatszög. Mekkora a gúla felszíne? Hogyan változna meg az eredmény, ha az alapja 6 cm oldalú szabályos nyolcszög lenne?
3. Egy 10 cm élű kockába egy gúlát írunk, úgy, hogy az egyik lapjának a középpontját összekötjük a szemközti lap csúcsaival. Mennyi az így keletkezett gúla felszíne és térfogata?
4. Egy szabályos gúla felszíne 864 cm^3, oldallapjainak magassága pedig 15 cm. Mekkora a gúla magassága és térfogata?
5. Az Egyiptomban található Kheopsz-piramis alapja egy 230 m oldalhosszúságú négyzet, oldalélei egyenlőek, magassága pedig 150 m. A piramist mészkőből építették, melynek sűrűsége 2,7 tonna/m^3.
a) Mekkora a piramis tömege kg-ban kifejezve?
b) Egy művész elhatározta, hogy befedi a piramist textillel, legalább hány m^2 anyagra lesz szüksége?

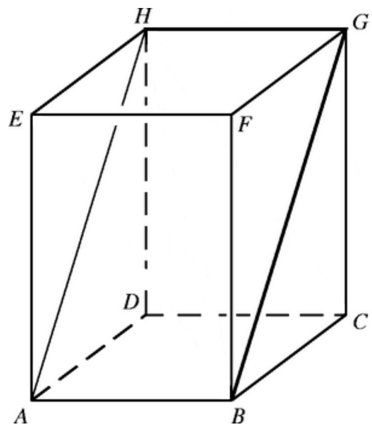
Összefoglalás

Óraterv a 13. órához

Idő	Tevékenység	Leírás	Munkaforma
0 – 10. perc	Köszöntés, adminisztráció, házi feladat ellenőrzés	A hiányzók beírása a naplóba. A problémás házi feladatok közös megbeszélése.	Frontális
10 – 15. perc	Összefoglalás	A tanult térbeli alakzatok összegyűjtése a táblán (felszín- és térfogatképlettel együtt).	Frontális
15 – 30. perc	Feladatmegoldás	A kiosztott feladatokat a tanulók egyénileg vagy kiscsoportban (max. 3 fő) oldják meg.	Egyéni vagy csoportmunka
30 – 40. perc	Feladatmegbeszélés	A feladatok megoldásának közös megvitatása a táblánál.	Frontális
40 – 45. perc	Az óra lezárása	A tanulók emlékeztetése a témazáró dolgozatra. Az ezzel kapcsolatban felmerült kérdések megbeszélése. Elköszönés.	Frontális

Feladatok:

1. Mekkora távolságra van az *a* élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti lapjától?
2. Elfér-e 2 dl kakaó abban a henger alakú bögrében, amelynek az alapja 7cm átmérőjű kör, magassága pedig 10 cm?
3. Egy négyzetes hasáb magassága 4 cm. A hasábból az ábrán látható módon kimetszettünk egy darabot. Az így kapott téglalap területe 15 cm^2. Határozzuk meg a hasáb alapjának élét, lapátlóit, testátlóját, felszínét és térfogatát!



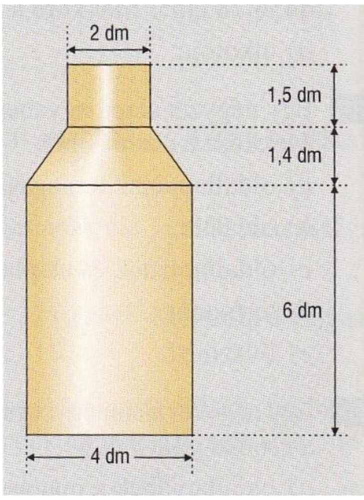
4. Egy forgáskúp kiterített palástja 8 cm sugarú 150°-os középponti szögű körcikk. Mekkora a forgáskúp alapkörének sugara, felszíne, valamint térfogata?

5. Egy szabályos négyoldalú gúla térfogata 648 cm^3, magassága harmada az alapélnek. Mekkora a gúla alapéle és felszíne?

6. A mellékelt ábrán egy mézesbödön oldalnézetét láthatjuk.

   a. Hány kilogramm méz fér bele, ha a méz szintje legfeljebb a perem alatt 2 centiméterre lehet, és a méz sűrűsége 1,4 $\frac{kg}{dm^3}$?

   b. Adjuk meg, hogy mennyi bádog kell a bödön elkészítéséhez, ha az összeállításkor az illesztések miatt 8% anyagtöbblettel kell számolni.



7. Egy vászonnal bevont lámpabura szabályos hatoldalú csonka gúla palástja. Hány cm^2 vászon szükséges a bura elkészítéséhez, ha az alapél és oldalél 20 cm, a fedőlap éle 15 cm hosszú?

8. A Föld jó közelítéssel $R_F = 6370$ km sugarú gömbnek tekinthető. Ez alapján rögzítették a Föld felszínéhez a szélességi és hosszúsági fokok gömbi koordináta-rendszerét. (Ennek módjára emlékezhetünk például a földrajz órákról. Csak ismétlésképpen: a hosszúsági körök vagy másképpen délkörök az északi és a déli sarkon áthaladó főkörök, a szélességi körök pedig a rájuk merőleges irányú síkmetszetek. A szélességi körök közül egyedül az Egyenlítő a főkör, ezt tekintjük a 0°szélességi körnek, míg a délkörök közül a londoni Greenwichen áthaladó kapta ezt a kezdőértéket. A hosszúsági és szélességi köröket természetes módon (a teljes körnek megfelelően) 360°-ra osztották.) Budapest helyzete például: északi szélesség 47°30’ és keleti hosszúság 19°05’.

   a. Mekkora a 47°30’ szélességi és a 19°05’ hosszúsági körök kerülete?

   b. Mekkora a budapesti szélességi körön két olyan szomszédos hosszúsági kör távolsága, amelyek fokban mérve egész számértékűek?

   c. Mekkora két szomszédos, fokban mérve egész számértékű szélességi kör távolsága a Föld felszínén?

d. Az angol és a nemzetközi tengeri mérföld hossza megegyezik két olyan szélességi körnek a Föld felszínén mért távolságával, amelyek különbsége 1’. Kb. hány méter hosszú egy angol tengeri mérföld?

9. Otto Guericke 1657-ben mutatta be világhíres kísérletét, amellyel bizonyította a vákuum erejét. Ebben két egymáshoz illesztett 35 cm átmérőjű félgömbből kiszivattyúzta a levegőt (magdeburgi féltekék). A félgömböket 12 lóval is alig bírta széthúzatni. Mekkora a két félgömbből álló gömb térfogata?

Témazáró dolgozat

1. Egy *a* oldalú szabályos háromszög csúcsaitól egy *P* pont *b* távolságra van. Milyen távol van a P pont a háromszög síkjától?
2. Határozzuk meg a kocka élét, lapátlóját, testátlóját, felszínét és térfogatát, ha átlós síkmetszetének területe $225\sqrt{2}$ cm^2!
3. Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonkagúla alakú. Felső lapja 14 m, az alsó 7 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mennyi víz van benne, ha csak fele magasságig van töltve?
4. Egy kocka éleinek összege 12*a*. Mekkora az éle az ugyanilyen élösszegű többi szabályos testnek?
5. Egyenes körkúp palástja kiterítve 12 cm sugarú, 240° középponti szögű körcikk. Mekkora a térfogata?
6. Egy gömb felszíne 40 cm^2. Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelynek térfogata kétszer akkora, mint az első gömbé?

Javítókulcs:

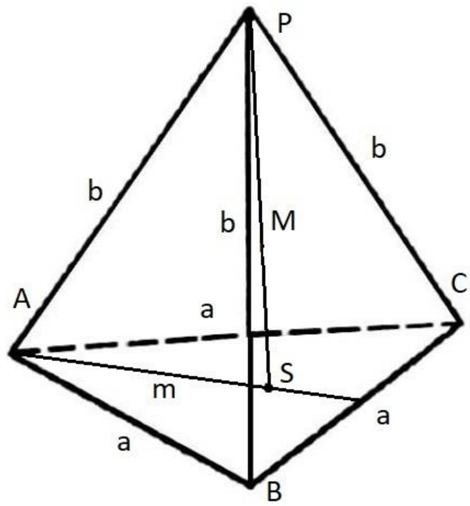
1) feladat *(4 pont)*

Ábra *1 pont*

$$m=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$ *1 pont*

$$\overline{AS}=\frac{2}{3}m$$ *1 pont*

$$M=\sqrt{b^2-\left(\frac{2}{3}m\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot a^2}=\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}$$ *1 pont*



2) feladat *(10 pont)*

$t=225\sqrt{2}\ \text{cm}^2=a\cdot b$ *1 pont*

$b=a\sqrt{2}$ *1 pont*

$a=\sqrt{\dfrac{225\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}=15$ cm a kocka éle *1 pont*

$b=15\sqrt{2}$ cm a kocka lapátlója *1 pont*

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15^2+\left(15\sqrt{2}\right)^2}=15\sqrt{3}$ cm a kocka testátlója *1+1 pont*

$A=6a^2=6\cdot 225=1350\ \text{cm}^2$ *1+1 pont*

$V=a^3=15^3=3375\ \text{cm}^3$ *1+1 pont*

3) feladat *(5 pont)*

Ábra (Felső él legyen a, az alsó él legyen c, a vízgyűjtő mélysége m) *1 pont*

$V=\frac{m}{3}\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)=\frac{6}{3}\left(14^2+\sqrt{14\cdot 7}+7^2\right)=490+14\sqrt{2}\text{ m}^3$ *1+1 pont*

$\frac{m}{2}$ m magasságban a csonkagúla vízszintes síkmetszete egy négyzet, melynek oldalhossza a felső- és alsó lap oldalhosszának számtani közepe a párhuzamos szelők tétele miatt:

$b=\frac{a+c}{2}=10,5\text{ m}.$ *1 pont*

$V_{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{m}{2}}{3}\left(T'+\sqrt{T't}+t\right)=159,25+\sqrt{73,5}\text{ m}^3$ *1 pont*

4) feladat *(10 pont)*

Tudja, hogy melyek a szabályos testek (a kockán kívül) (0,5 pont/db) *2 pont*

Tetraéder: $\frac{3\cdot 4}{2}=6$ db él *1 pont*

Az élhossza: $\frac{12a}{6}=2a$ *1 pont*

Oktaéder: $\frac{3\cdot 8}{2}=12$ db él *1 pont*

Az élhossza: $\frac{12a}{12}=a$ *1 pont*

Dodekaéder: $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ db él *1 pont*

Az élhossza: $\frac{12a}{30}=\frac{2}{5}a$ *1 pont*

Ikozaéder: $\frac{3\cdot 20}{2}=30$ db él *1 pont*

Az élhossza: $\frac{12a}{30}=\frac{2}{5}a$ *1 pont*

5) feladat *(9 pont)*

Ábra (a körcikk sugara legyen a, az ívhossza legyen i, a kúp magassága m) *1 pont*

$i=\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot a$ *1 pont*

$i=\frac{240°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 12=16\pi\text{ cm}$ *1 pont*

$i=K_{\text{o}}=2r\pi$ *1 pont*

$r=\frac{16\pi}{2\pi}=8\text{ cm}$ *1 pont*

$T_{\text{o}}=r^2\pi=64\pi\text{ cm}^2$ *1 pont*

$m=\sqrt{a^2-r^2}=4\sqrt{5}\text{ cm}$ *1 pont*

$V=T_{\text{o}}\cdot m=256\pi\sqrt{5}\text{ cm}^3$ *1+1 pont*

6) feladat *(5 pont)*

$r_1 = \lambda \cdot r_2$

$A_1 = \lambda^2 \cdot A_2$ *1 pont*

$V_1 = \lambda^3 \cdot V_2$ *1 pont*

$\lambda^3 = \frac{1}{2}$ *1 pont*

$\lambda^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ *1 pont*

$A_2 = \frac{A_1}{\lambda^2} = 40 \cdot \sqrt[3]{4}\ \text{cm}^2$ *1 pont*

Értékelés:

5	80-100%	35-43 pont
4	62-79%	27-34 pont
3	46-61%	20-26 pont
2	30-45%	13-19 pont
1	0-29%	0-12 pont

Felhasznált irodalom:

Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: *Matematika a gimnáziumok számára 12.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 2004

Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: *Sokszínű matematika 12.*, Mozaik Kiadó, Szeged 2011

Ruff János, Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12. évfolyam,* Maxim Kiadó, Szeged 2009

Dr. Gerőcs László, Számadó László: *Matematika 12.*, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Budapest 2015

Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Iványiné Harró Ágota, Morvai Éva, Reiman István: *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 2005

Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: *Az érthető matematika 12.*, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Budapest 2015

Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12.*, Mozaik kiadó, Szeged 2012