Matematika tanítása 4.
Tanítási tervezet

Készítette: Dienes Petronella és Schulek-Tóth Virág

HALMAZOK, KOMBINATORIKA

Óraszám	Téma	Ismeretanyag	Az óra célja	Fejlesztési terület
1.	A számok áttekintése	Természetes számok, egészek, racionális és irracionális számok	A korábban tanultak felelevenítése	Az ismeretek újra gondolása, strukturált gondolkodás fejlesztése
2.	Halmazok, részhalmazok	tartalmazás, elem, részhalmaz, Venn-diagramm, alaphalmaz, üreshalmaz	A korábban tanultak felelevenítése, azok rendszerezése, összefüggése keresése	Csoportosítás különböző tulajdonság szerint.
3.	Műveletek halmazokkal, halmaz elemszáma	metszet, unió, komplementer	Helyes definíciók megalkotása, jelölések használata	Matematikai jelölésekkel történő számolás fejlesztése
4.	Számegyenesek, intervallumok	zárt, nyitott intervallumok	Intervallumok alkalmazása	Elnevezések megtanulása, definíciókra való emlékezés. Annak tudatosítása, hogy az intervallum végtelen halmaz
5.	Logikai szita formula	logikai szita formula	A logikai szita alkalmazása egyszerű esetekben.	Összetett problémák értelmezése, rendszerezése
6.	Ismétlés, gyakorlás	-	A tanult ismeretanyag elmélyítése, szövegértés	Szövegértés, többféle gondolatmenet végig követése, problémamegoldási készség fejlesztése, a tanultak alkalmazása
7.	Egyszerű leszámlálások, skatulya elv	párba állítás	Az esetek pontos számbavétele, matematikai tartalmú szöveg értelmezése	A szisztematikus gondolkodás fejlesztése, szövegértés fejlesztése

8.	Ismétlés nélküli permutáció	faktoriális, permutáció	Sorrendek összeszámolása, kombinatorikai problémák felfedezése a mindennapi életben	A szisztematikus gondolkodás fejlesztése, modellalkotás
9.	Ismétléses permutáció	ismétléses permutáció	Sorrendek összeszámolása, kombinatorikai problémák felfedezése a mindennapi életben	A szisztematikus gondolkodás fejlesztése, összetettebb problémák megoldása
10.	Gyakorlás	Az eddig tanult kombinatorikai ismeretek	A tanult ismeretek alkalmazása	A tanult ismeretek alkalmazása
11.	Összefoglalás	Az eddig tanult halmazelméleti és kombinatorikai ismeretek.	A tanult ismeretek alkalmazása	A tanult ismeretek alkalmazása
12.	Dolgozat	Az eddig tanult halmazelméleti és kombinatorikai ismeretek.	Ismeretek számonkérése, tudásszint vizsgálata	A tanult ismeretek alkalmazása

Óravázlat az 5. órához

Tantárgy: Matematika Évfolyam:9. (Általános Gimnázium)	Készítette: Dienes Petronella Schulek- Tóth Virág
Témakör:	**Az óra anyaga:**
Halmazok, Kombinatorika	Logikai szita formula
Az előző óra:	**Következő óra:**
Halmazműveletek, Halmazok elemszáma	További feladatok a logikai szita gyakorlására, ismétlés
Az óra Típusa:	**Módszer:**
ismeretközlő	frontális és páros munka
Taneszközök:	**Szemléltető eszközök:**
füzet	tábla, projektor

Előzmények: A korábbi óráinkon a halmazműveletekkel kapcsolatos ismereteinket elevenítettük fel. Már ismerjük az alaphalmaz, komplementer, unió, metszet kifejezéseket. Megbeszéltük, hogy mit értünk két halmaz különbségén, illetve azt is megtanultunk, hogy mit tekintünk egy halmaz elemszámának.

Fejlesztési célok: A korábbi tapasztalatok rendszerezése, a logikai szita megismerése.

Felhasznált irodalom: Sokszínű Matematika 9. (mozaik kiadó), saját feladatok

Idő (perc)	Tevékenység, Tanegység	Módszer, tartalom	Megjegyzés, szemléltetés
2 (0-2)	köszöntés, hiányzók feljegyzése	-	-
10 (2-12)	előző órai házi feladatok ellenőrzése	Frontális munka: • a diákok felszólítás alapján közlik az előző órai házi feladatok megoldásait	• a feladatok megoldásai felkerülnek a táblára • egy kiemelt feladat teljes megoldása felkerül a táblára, mert ez szorosan kapcsolódik a mai tananyaghoz
15(12-27)	új ismeretanyag átadása	Interaktív frontális munka: • Feladat: Gombóc Artúr	• közös feladatmegoldás • a megoldott példa általánosítására, vagyis a megoldást átkonvertáljuk a halmazok nyelvére • minden felkerül a táblára
10(27-37)	feladatmegoldás	Páros munka: • Feladat: Új tanár az osztályban	• a dákok párban oldják meg a kiadott feladatot • közben körbejárok és válaszolok az esetlegesen felmerülő kérdésekre, problémákra
5 (37-42)	összefoglalás, házi feladatok kiosztása	Frontális munka: • a korábban táblára felírt (és ott is hagyott) legfontosabb összefüggések összegzése	• közben használom a táblát, illetve figyelek arra, hogy mindenki feljegyezze az otthoni feladatokat
1 (42-43)	reflexió	Frontális munka: • a értékelem a tanulók mai tevékenységét	• megköszönöm a közös munkát • az aktív tanulókat jutalmazom

Előző órai házi feladat:	Tk. 23. o./ 6. Osztálykirándulás

Tk. 23. o./ 6

Határozzuk meg az *A* és *B* halmazokat, ha tudjuk, hogy:

a) $A \cup B = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$$A = \{8; 9; 10\}$$
$$A \cap B = \{5\}$$

b) $A \cup B = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$$B = \{5; 6; 8; 9; 10\}$$
$$A \cap B = \emptyset$$

Osztálykirándulás (kiemelt feladat)

Kérdezzük meg az osztálytársainkat, hogy a következő városok közül (Eger, Pécs, Szeged), melyek lennének számukra kedves helyek a következő osztálykirándulás céljából. A kapott válaszokról készítsünk halmazábrát, ahol *A* halmaz jelentse azokat, akik Egerbe utaznának szívesen, *B* halmaz azokat, akik Pécset látogatnák meg, *C* halmaz pedig azokat, akiknek Szeged szimpatikus.

Órai feladat:	Gombóc Artúr Új tanár az osztályban

Közös feladat: Gombóc Artúr

Mint az mindannyian tudjuk, Gombóc Artúr nagyon szereti a csokoládét. Mindenfélét, a kerek csokoládét, a szögletes csokoládét, a hosszú csokoládét, a gömbölyű csokoládét, a lapos csokoládét, a lyukas csokoládét, a csomagolt csokoládét, a tömör csokoládét, a megkezdett csokoládét, az édes csokoládét, a mogyorós csokoládét, a tavalyi csokoládét, idei csokoládét és minden olyan csokoládét, amit csak készítenek a világon.
Ezért kamrája tele van csokoládéval. Mivel már nem fér el sehol, ezért rendszerezni szeretné őket és feljegyzést készít a kamra tartalmáról.

A kamrában 100 db csokoládét talál, ebből

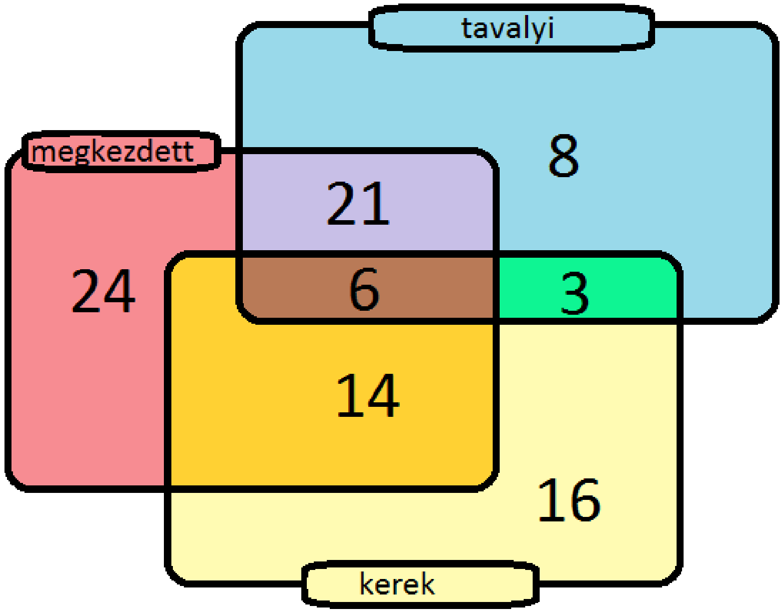
- 65 db megkezdett csokoládé
- 38 db tavalyi csokoládé
- 39 db kerek csokoládé
- 27 db megkezdett, tavalyi csokoládé
- 20 db megkezdett, kerek csokoládé
- 9 db tavalyi, kerek csokoládé
- 6 db megkezdett, tavalyi, kerek csokoládé

Hány olyan csokoládéja van Gombóc Artúrnak, amely nem megkezdett, nem tavalyi, és nem kerek? Hány olyan csokoládéja van, amely csak megkezdett (de nem tavalyi, és nem kerek), csak tavalyi (de nem megkezdett és nem kerek), csak kerek (de nem megkezdett és nem tavalyi)?

1. Megoldás

Készítsünk halmazábrát!

1. Először a három halmaz metszetébe beírjuk a 6-ot.
2. Ezután beírjuk azokat, akik két feltételnek felelnek meg. (Levonva mindegyik értékéből a 6-ot)
   a. megkezdett, tavalyi: 27-6=21
   b. megkezdett, kerek: 20-6=14
   c. tavalyi, kerek: 9-6=3
3. Kiszámoljuk azokat, akik egy feltételnek felelnek meg. Ezzel választ is kaptunk a második kérdésre.
   a. csak megkezdett: 65-21-6-14=24
   b. csak tavalyi: 39-14-6-3= 16
   c. csak kerek: 38-21-6-3=8
   d. válasz: 24+16+8=48
4. Az eddigi eredményekből kiszámolhatjuk, hány olyan csokoládéja van, amely nem megkezdett, nem tavalyi, és nem kerek.
   a. 21+14+3+24+16+8+6=92
   b. válasz: 100-92=8



2. Megoldás

Jelölje *U* a csokoládék halmazát, *A* a megkezdett csokoládék, *B* a tavalyi csokoládék, *C* pedig a kerek csokoládék halmazát.
Először azt számoljuk ki, hogy csokoládé felel meg a három közül legalább egy feltételnek.

- összeadjuk a megkezdett, tavaly, kerek csokoládék számát: 65+38+39
- ekkor kétszer számoltuk azokat, akik két feltételnek felelnek meg (megkezdett és tavalyi is, megkezdett és kerek is, tavalyi és kerek is) ezért ezeket, ki kell vonnunk az eredményből: 65+38+39-27-20-9
- ekkor azokat, akik mindhárom feltételnek megfelelnek azokat háromszor hozzáadtuk, és háromszor és is vettük, így azt ismét hozzá kell adnunk: 65+38+39-27-20-9+6= 92

Ezt a gondolatmenetet leírjuk a halmazműveletek nyelvén:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + A \cap B \cap C \vee$$

Most nekünk azokra van szükségünk, amelyek egyik feltételnek sem felelnek meg, tehát 100-92=8
Ezt a gondolatmenetet leírjuk a halmazműveletek nyelvén:

$$\left|A \cup \acute{B} \cup C\right| = |U| - |A \cup B \cup C| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - A \cap B \cap C \vee$$

Most az első kérdésre is szeretnénk választ találni, tehát rá kell jönnünk, hogy hány db olyan csokoládé van, amely csak egy feltételnek felel meg. Kezdjük azokkal, amelyek megkezdettek. (A másik két esetben is hasonlóan fogunk eljárni.)

- Összesen 65 db megkezdett csokoládé van, de ezekből le kell vonni azokat, amelyek tavalyiak is, illetve azokat is amelyek alakja kerek: 65-20-27
- De akkor kétszer vontuk le azokat, amelyek tavalyról maradtak és kerekek is, így ezek számát egyszer hozzá kell adni. Tehát a csak megkezdett, de nem tavalyi és nem is kerek csokoládék száma: 65-20-27+6=24

Halmazokkal:

$$\left|A \cap \acute{B} \cap \acute{C}\right| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + A \cap B \cap C \vee$$

Tavalyi, de nem megkezdett és nem is kerek: 38-27-9+6=8

$$\left|\acute{A} \cap B \cap \acute{C}\right| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + A \cap B \cap C \vee$$

Kerek, de nem megkezdett és nem is tavalyi: 39-20-9+6=16

$$\left|\acute{A} \cap \acute{B} \cap C\right| = |C| - |C \cap B| - |A \cap C| + A \cap B \cap C \vee$$

Tehát, azok száma, amelyek csak egy feltételnek felelnek meg: 24+16+8=48

A következő egyenletekkel jelzett összefüggéseket nevezzük *logikai szitának*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$\left|A \acute{U} B\right| = |U| - |A \cup B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + A \cap B \cap C \vee$$
$$\left|A \cup \acute{B} \cup C\right| = |U| - |A \cup B \cup C|$$

Páros feladat: Új tanár az osztályban

Az osztály új tanárt kapott. A hetes így mutatta be társait: Az osztálynak 45 tanulója van, köztük 25 fiú. A jeles tanulók száma 30, köztük 16 fiú. 28-an sportolnak, közülük 18 fiú, illetve 17 jeles tanuló. 15 olyan fiú van, aki jeles tanuló és sportol is.
A tanár szólt a hetesnek, hogy a jelentés hibás volt. Honnan tudta, ha korábban senkit sem ismert az osztályból?

Megoldás

Legyen *A* a fiúk, *B* a jelesek, *C* pedig a sportolók halmaza.
Ekkor:

- $|A|=25$
- $|B|=30$
- $|C|=28$
- $|A \cap B|=16$
- $|A \cap C|=18$
- $|B \cap C|=17$
- $|A \cap B \cap C|=15$

Logikai szita formula használata:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$|A \cup B \cup C| = 25 + 30 + 28 - 16 - 18 - 17 + 15 = 47$$

47 viszont több, mint az osztálylétszám, tehát valahol hibáznia kellett.

Házi feladat:	WOW-COD Tk. 27. o./ 1

WOW-COD

Az évfolyamon a WOW (World of Warcraft) játékkal játszó fiúk 80%-a COD-ozik (Call of Duty) is. És a COd-osok 30%-a WOW-ozik is.

Ha összesen 15 fiú WOW-ozik, akkor hányan játszanak a COD-dal?

Tk. 27. o./ 1

Egy pizzaárus 100 egymás utáni pizzarendelést jegyzett fel. 60 vásárló kért sajtot is és pepperonit is a pizzájára, 80 vásárló sajtot, és 72 pepperonit kért a pizzájára.

a. Hányan rendeltek sajtos pizzát pepperoni nélkül?

b. Hányan rendeltek pepperonis pizzát sajt nélkül?

c. Hányan nem kértek se sajtot, se pepperonit a pizzájukra?

Óravázlat a 10. órához

Tantárgy: Matematika Évfolyam:9. (Általános Gimnázium)	Készítette: Dienes Petronella Schulek- Tóth Virág
Témakör:	**Az óra anyaga:**
Halmazok, Kombinatorika	Az eddig tanult halmazelméleti és kombinatorikai ismeretek gyakorlása
Az előző óra:	**Következő óra:**
Ismétléses permutáció	Összefoglalás
Az óra Típusa:	**Módszer:**
gyakorló	Frontális és páros munka
Taneszközök:	**Szemléltető eszközök:**
Tankönyv	

Előzmények: halmaz fogalma, műveletek halmazokkal, leszámolási feladatok, skatulya elv, ismétlés nélküli permutáció

Fejlesztési célok: az eddig tanult ismeretanyag különböző problémamegoldásra történő alkalmazása

Felhasznált irodalom: Sokszínű Matematika 9. (Mozaik Kiadó), http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_kombinatorika_i.pdf

Idő (perc)	Tevékenység, Tanegység	Módszer, tartalom	Megjegyzés, szemléltetés
2 (0-2)	köszöntés, hiányzók feljegyzése	-	-
10 (2-12)	előző órai házi feladatok ellenőrzése	Frontális munka: • a diákok felszólítás alapján közlik az előző órai házi feladatok megoldásait	• a feladatok megoldásai felkerülnek a táblára
15(12-27)	feladatmegoldás	Diákok párban / egyedül dolgoznak a feladatokon	
10(27-37)	feladatmegoldás	Közösen ellenőrizzük a feladatokat a táblánál	
5 (37-42)	összefoglalás, házi feladatok kiosztása	Átbeszéljük még egyszer a tanult és órán alkalmazott matematikai módszereket. Házi feladat: az óra keretén belül nem megoldott feladatok	
1 (42-43)	reflexió	Frontális munka: • a értékelem a tanulók mai tevékenységét	• megköszönöm a közös munkát • az aktív tanulókat jutalmazom

Előző órai házi feladat:	Tk. 14. o./ 7. Számcédulák

Az 1, 2, 3, 4 számjegyeket felírjuk egy-egy cédulára, és beletesszük egy kalapba. Kihúzunk egy cédulát, felírjuk a rajta lévő számot egy papírra, aztán visszatesszük a cédulát. Ezt a műveletet négyszer egymás után megismételjük, így végül egy négyjegyű szám áll elő.

a) Hányféle négyjegyű számot kaphatunk?

b) Hányféle olyan négyjegyű számot kaphatunk, mely nem nagyobb 3000-nél?

Órai feladatok	(amire nem jut idő, az házi feladat)

1. Egy dobozban azonos méretű zoknik vannak: összesen 5 párra való fehér, 10 párra való fekete és 15 párra való barna zokni. Hány darabot kell ezekből látatlanban kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy pár? (A jobb- és a ballábas zokni egyforma.) *(mo: 4 db)*

2. Van 80 golyónk, közülük 35 piros, 25 zöld, 15 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte

a) piros;

b) piros vagy fekete

c) piros és fekete;

d) valamelyik színből legalább három? *(mo: 46, 41, 76, 9)*

3. Egy sportboltban négyfajta színű futballmez, háromfajta színű nadrág és kétfajta lábszárvédő kapható. Hányféle szerelést lehet ebből összeállítani? *(mo: 4!)*

4. Hány darab háromjegyű számot tudsz készíteni a 0, 2, 3, 9 számkártyákból? *(mo: $3x4^3$)*
Hány darab háromjegyű számot tudsz készíteni a 0, 2, 3, 9 számkártyákból, hogy osztható legyen:

a, 2-vel *(mo: 3x4x4x2)*
b, 5-tel *(mo: 3x4x4x1)*

5. Aladár, Béla, Csaba és Dávid futóversenyen mérte össze gyorsaságát. Versenyüknek hányféle végeredménye (a négy versenyzőnek hányféle sorrendje) lehetséges, ha

a) nincs holtverseny? *(mo: 4!)*

b) Aladár és Béla holtversenyben végzett, de más holtverseny nem volt? *(mo: 3!)*

c) ketten holtversenyben végeztek, de más holtverseny nem volt? *(mo: 6x3!)*

d) Aladár lett a harmadik (itt és a továbbiakban feltesszük, hogy holtverseny nem volt)? *(mo: 3!)*

e) Aladár gyorsabb volt, mint Béla? *(mo: 9)*

f) Aladár közvetlenül Béla előtt ért célba? *(mo: 3!)*

Témazáró dolgozat

1) **Az osztályban 12 tanulónak volt ötöse matematikából, 16 tanulónak magyarból. 8 tanulónak egyik tárgyból sem sikerült ötöst szerezni. Hányan járnak az osztályba, ha 6 tanulónak matematikából és magyarból is ötöse volt?**

   (5 pont)

2) **Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső? És hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha Bea szeretne Rezső mellé ülni?**

   (5 pont)

3) **Hány olyan különböző jegyekből álló nyolcjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 jegyekből, amely**

   a) osztható 5-tel;

   b) 9-cel?

   (5 pont)

4) **A közelmúltban új rendszámtáblákat vezettek be. A régi táblákon két betűt és négy számjegyet lehetett felhasználni, pl. KL-2351. Az újabb rendszámtáblákon három betű és három szám áll, pl. HGP-523. (A rendszámtáblán összesen 26-féle betű és 10-féle számjegy szerepelhet.)**

   (12 pont)

   a) Hány különböző rendszámtábla készíthető az egyes típusoknál?

   b) Melyik fajta rendszámtáblából van több: amelyikben nem ismétlődik számjegy, vagy amiben igen? A kérdésre mindkét típus esetén válaszoljunk!

5) **Egy ládában 4 fajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiség, összesen 100 darab. Hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy a kivettek között biztosan legyen valamelyik fajtából 10 alma?**

(3 pont)

6*) Szorgalmi feldadat

Osztályunk 20 tanulója közül 14 barna szemű, 15 sötét hajú, 17 gyerek 50 kg-nál nehezebb, 18 pedig 160 cm-nél magasabb. Mutassuk meg, hogy legalább 4 gyerek mind a 4 tulajdonsággal rendelkezik.

(+5 pont)

Témazáró dolgozat megoldása és értékelése

1) **Az osztályban 12 tanulónak volt ötöse matematikából, 16 tanulónak magyarból. 8 tanulónak egyik tárgyból sem sikerült ötöst szerezni. Hányan járnak az osztályba, ha 6 tanulónak matematikából és magyarból is ötöse volt?** (5 pont)

   Adatok felírása: (1 pont)

   - matek: |A|=12
   - magyar: |B|=16
   - $|A \cup B|$komplementer: 8
   - $|A \cap B|$=6

   Feladatmegoldás:

   - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (2 pont)
   - $|A \cup B| = 12 + 16 - 6 = 22$
   - $|A \cup B| + |A \cup B| = 22 + 8 = 30$ =>30-an járnak az osztályba (2 pont)

2) **Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső? És hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha Bea szeretne Rezső mellé ülni?** (5 pont)

   5! (2 pont)

   $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2 = 48$ (3 pont)

3) Hány olyan különböző jegyekből álló nyolcjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 jegyekből, amely

c) osztható 5-tel:

5-öst rögzítem, a többi számjegyet így 7! féleképp írhatom föl, tehát 7! (3 pont)

d) 9-cel?

A számjegyek összegének kell 9-cel oszthatónak lennie. Párosítással: 9, 7+2, 6+3, 5+4 oszthatók 9-cel. Az 1 kimarad. Mivel az ismétlés nélküli permutációhoz az összes számjegyet fel kéne használnom, így sehogyan sem kaphatok 9-cel osztható számot. (2 pont)

4) A közelmúltban új rendszámtáblákat vezettek be. A régi táblákon két betűt és négy számjegyet lehetett felhasználni, pl. KL-2351. Az újabb rendszámtáblákon három betű és három szám áll, pl. HGP-523. (A rendszámtáblán összesen 26-féle betű és 10-féle számjegy szerepelhet.) (12 pont)

a) Hány különböző rendszámtábla készíthető az egyes típusoknál?

- 2 betű, 4 szám: $26^2 \cdot 10^4$ (2 pont)
- 3 betű, 3 szám: $26^3 \cdot 10^3$ (2 pont)

b) Melyik fajta rendszámtáblából van több: amelyikben nem ismétlődik számjegy, vagy amiben igen? A kérdésre mindkét típus esetén válaszoljunk!

- 2 betű, 4 szám:
  - nem ismétlődik számjegy: $26^2 \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 26^2 \cdot 5040$
  - ismétlődik benne számjegy: $26^2 \cdot (10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 26^2 \cdot 4960$

- 3 betű, 3 szám:
  - nem ismétlődik számjegy: $26^3 \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8) = 26^2 \cdot 720$
  - ismétlődik benne számjegy: $26^3 \cdot (10^3 - 10 \cdot 9 \cdot 8) = 26^2 \cdot 280$

5) **Egy ládában 4 fajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiség, összesen 100 darab. Hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy a kivettek között biztosan legyen valamelyik fajtából 10 alma?** (3 pont)

25	25	25	25

Legrosszabb eset: Mindegyikből pont 9 db van. $4 \cdot 9 = 36$

Ha még egyet kiveszek, már biztosan lesz az egyik fajtából 10 db.

6) Osztályunk 20 tanulója közül 14 barna szemű, 15 sötét hajú, 17 gyerek 50 kg-nál nehezebb, 18 pedig 160 cm-nél magasabb. Mutassuk meg, hogy legalább 4 gyerek mind a 4 tulajdonsággal rendelkezik.

Adatok:

- |A|=14
- |B|=15
- |C|=17
- |D|=18

Legalább:

- |A∩B|=9
- |A∩C|=11
- |A∩D|=12
- |B∩C|=12
- |B∩D|=13
- |C∩D|=15

- ⇨ nincs olyan tanuló, aki csak egy tulajdonsággal rendelkezik
- ⇨ minden hármas unió legalább 20 tanulót tartalmaz

Logikai szita formula használata:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$20 = 14 + 15 + 17 - 9 - 11 - 12 - |A \cap B \cap C|$$
$$|A \cap B \cap C| = 6$$
$$|A \cup B \cup D| = |A| + |B| + |D| - |A \cap B| - |A \cap D| - |B \cap D| + |A \cap B \cap D|$$
$$20 = 14 + 15 + 18 - 9 - 12 - 13 - |A \cap B \cap D|$$
$$|A \cap B \cap C| = 7$$

$$|A \cup C \cup D| = |A| + |C| + |D| - |A \cap C| - |A \cap D| - |C \cap D| + |A \cap C \cap D|$$
$$20 = 14 + 17 + 18 - 11 - 12 - 15 - |A \cap B \cap D|$$
$$|A \cap C \cap D| = 9$$

$$|B \cup C \cup D| = |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |B \cap C \cap D|$$
$$20 = 15 + 17 + 18 - 12 - 13 - 15 - |B \cap C \cap D|$$
$$|B \cap C \cap D| = 10$$

Logikai szita alkalmazása négy halmazra:

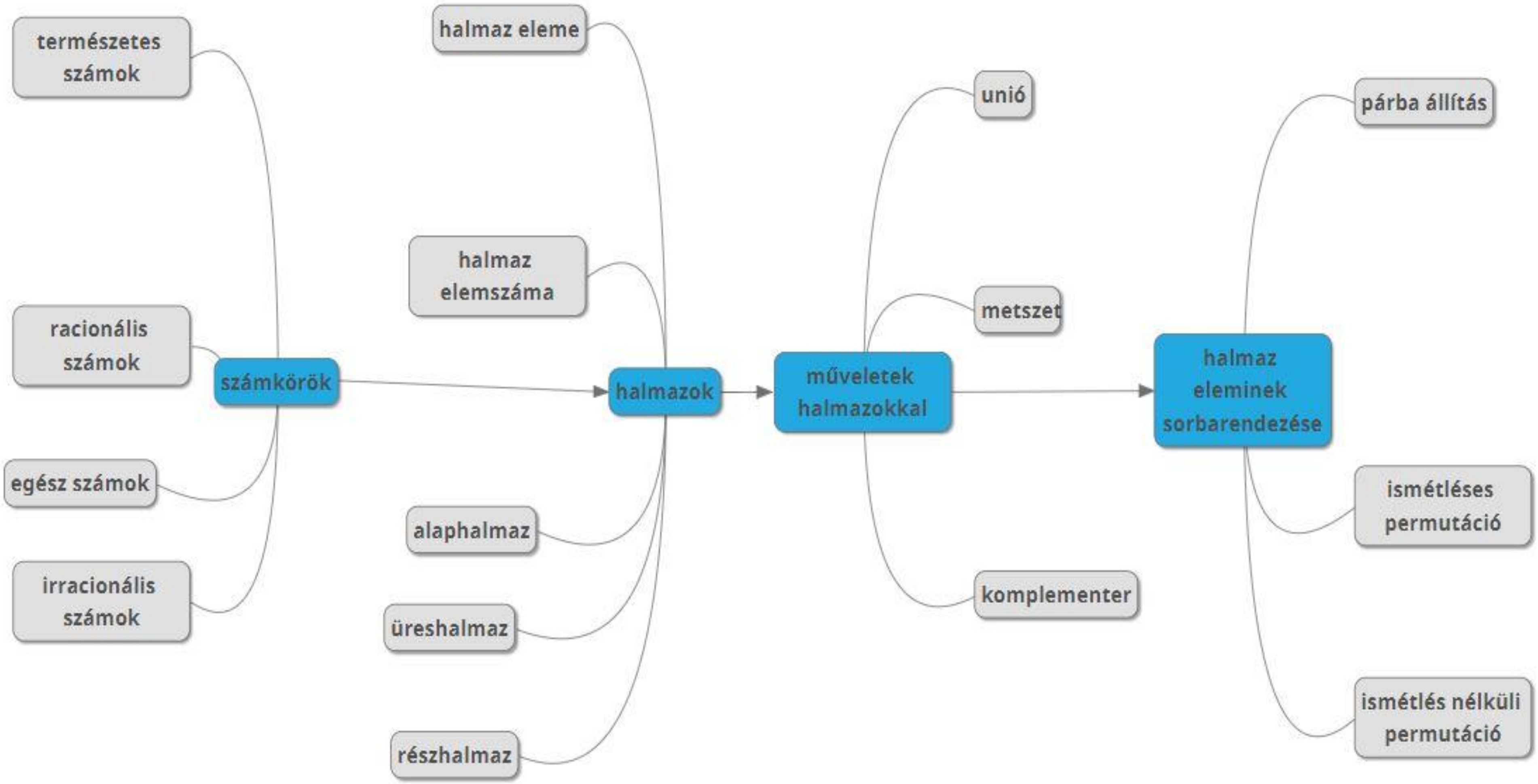
$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$
$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

$$20 = 14 + 15 + 17 + 18 - 9 - 11 - 12 - 12 - 13 - 15 + 6 + 7 + 9 + 10 - |A \cap B \cap C \cap D|$$
$$|A \cap B \cap C \cap D| = 4$$

Ponthatárok (Össz: 30+5)

5: 30 – 25,5
4: 25 – 21
3: 20,5 – 16,5
2: 16 – 12
1: 11 –

Fogalmi háló



Alkalmazások

A kombinatorika számtalan helyen előkerül az életünkben, ezért arra gondoltunk, hogy beépítenénk az egyik bevezető kombinatorikai tanóránkba, azt a feladatot, hogy gyűjtsenek kombinatorikai problémákat a hétköznapokból. Íme néhány példa:

- Ha Magyarországon vizsgáljuk a vezetékes telefonhálózatot, akkor lehetséges-e az, hogy van olyan család, akinek már nem jut telefonszám?
- Mennyi autót lehet még legyártani Magyarországon mielőtt elől kezdenénk az ABC-t?
- Baráti társaságokban lehetséges ismeretségek száma.
- Ha házaspárok moziba/ színházba mennek, hogyan ülhetnek le egymás mellé, ha különböző szempontok szerint szabályozzuk ezt a folyamatot?
- Cukrászdában/étteremben elfelejteni a pincér, hogy pontosan ki mit rendel. Hányféle leosztás lehetséges? (Itt már kitekinthetünk a valószínűségszámítás felé, mivel a gyakorlatban az kevésbé érdekes, hogy hányféleképp oszthatja ki a pincér a rendelt sütiket. Sokkal inkább foglalkoztathat minket, hogy milyen valószínűséggel kapom a hőn áhított sütit, amit én rendeltem?)

A kombinatorika szoros kapcsolatban van a valószínűségszámítással, így segítségünkre lehet abban, hogy semmiképp se szerencsejátékozzunk. Ha mégis ezt szeretnénk tenni, ki tudjuk számolni a lehetséges húzások számát, és azt is, hogy a Kincsem Parkban hányféle sorrendben érhetnek be a lovak a célba.

Matematikatörténet

Ókori indiai matematika (i. e. 900 – i. sz. 200)

Pingala (i. e. 4. század – i. e. 1. század között) prozódiáról, versmértékekről írt, *Csandahszútra* c. értekezésében a rövid és hosszú szótagok különféle kombinációjakor a kettes számrendszerhez hasonló eszközt használ. A metrika kombinatorikájáról szóló tételeiben a binomiális tételnek megfelelő állítások szerepelnek. Pingala fő műve a Fibonacci-számokról is tartalmaz alapvető tételeket, melyeket szanszkritul *mátráméru*nak nevez.

I. e. 400 és i. e. 200 között a dzsaina matematikusok elkezdték a matematikát önmagáért tanulmányozni. Ők vezették be elsőként a transzfinit számok, a halmazelmélet, a logaritmus és az indexek alaptörvényeit, a harmad- és negyedfokú egyenletek, szekvenciák és progressziók permutációk és kombinációk, négyzetre emelés és négyzetgyökvonás, valamint a véges és végtelen hatványok fogalmát.

Klasszikus kínai matematika (i. e. 200 – i. sz. 1300)

A kínaiak használták a mágikus négyzet elnevezésű kombinatorikai ábrát is, amelyet már igen régen leírtak és Yang Hui (i. sz. 1238-1398) tökéletesített. A mágikus négyzet körül rengeteg hiedelem kering, az ókorban még varázserőt, gyógyító hatást tulajdonítottak neki, mára már viszont csak egy egyszerű matematikai játék, amely egy olyan négyzet alakú számtáblázat, amelyben az egyes sorok, oszlopok és a két átló mentén álló számok összege egyenlő.

Klasszikus indiai matematika (400 – 1600)

Halájudha a 10. században *Mritaszandzsívaní* címen írt kommentárt a kb. i. e. 4-1. század között élt Pingala *Csandahszútra* művéhez, amely a különböző versmértékeket, így a rövid és hosszú szótagok (mint 2 állapotú bináris számok) különféle kombinációját elemzi és ismerteti az ezekhez kötődő algoritmusokat, ezzel a bináris aritmetika és a kombinatorika néhány fő elvét. Halájudha az eredetileg nagyon tömör 8.34-35 szútrához egészen hihető útmutatást ad, melynek keretében az ind vallásos világkép szent hegyének, a Meru-hegynek a "felépítését" mutatja be. A bináris számokból így megalkotott struktúra a 17. századi francia tudós után Pascal-háromszögként vált közismertté, holott az indiaik évszázadokkal ezelőtt ismerték az elvet. A kommentár továbbá bemutatja a Fibonacci-sorozatot és leírja a mátrixok képzésének módját is

17. század

Azon kívül, hogy a matematikát használni kezdték az égitestek tanulmányozásánál, Pierre de Fermat és Blaise Pascal levelezése során az alkalmazott matematika új területekre is behatolt. Pascal és Fermat szerencsejátékokról szóló vitáikban lefektették a valószínűségelmélet kutatásának alapjait és a kombinatorika szabályait is. Pascal fogadás-elméletében megpróbálta felhasználni az újonnan létrehozott valószínűségelméletet a vallásos élet melletti érvelésre, azon az alapon, hogy ha a siker valószínűsége kicsi, akkor a jutalom végtelen

18. század

Talán mindannyian ismerjük a kis Gauss történetét, miszerint tanítója egyszer azt a feladatot adta neki és diáktársainak, hogy adják össze a számokat 1-től 40-ig Mivel a tanító úr addig egy másik évfolyammal akart foglalkozni, és így akarta addig a kicsiket lefoglalni. De a kis Gauss hamarosan jelentkezett a jó eredménnyel. Csodálkozó tanítójának el is magyarázta, hogyan csinálta. Párba állította a számokat 40+1=39+2=38+3 stb. Ezek a párok mindig 41-t adnak összegül, és mivel 20 ilyen pár van, az eredmény 820. Ez a gondolkozás megegyezik a számtani sorozat összegének meghatározásánál alkalmazottal. Tanítója felismerve a kisfiú rendkívüli képességeit, jelentette az esetet elöljáróinak. Így jutott el a híre braunschweig-i herceghez, aki felkarolta a kis Gauss-t. Gimnáziumba került, majd a göttingeni egyetemre. Pályája töretlenül ívelt felfelé