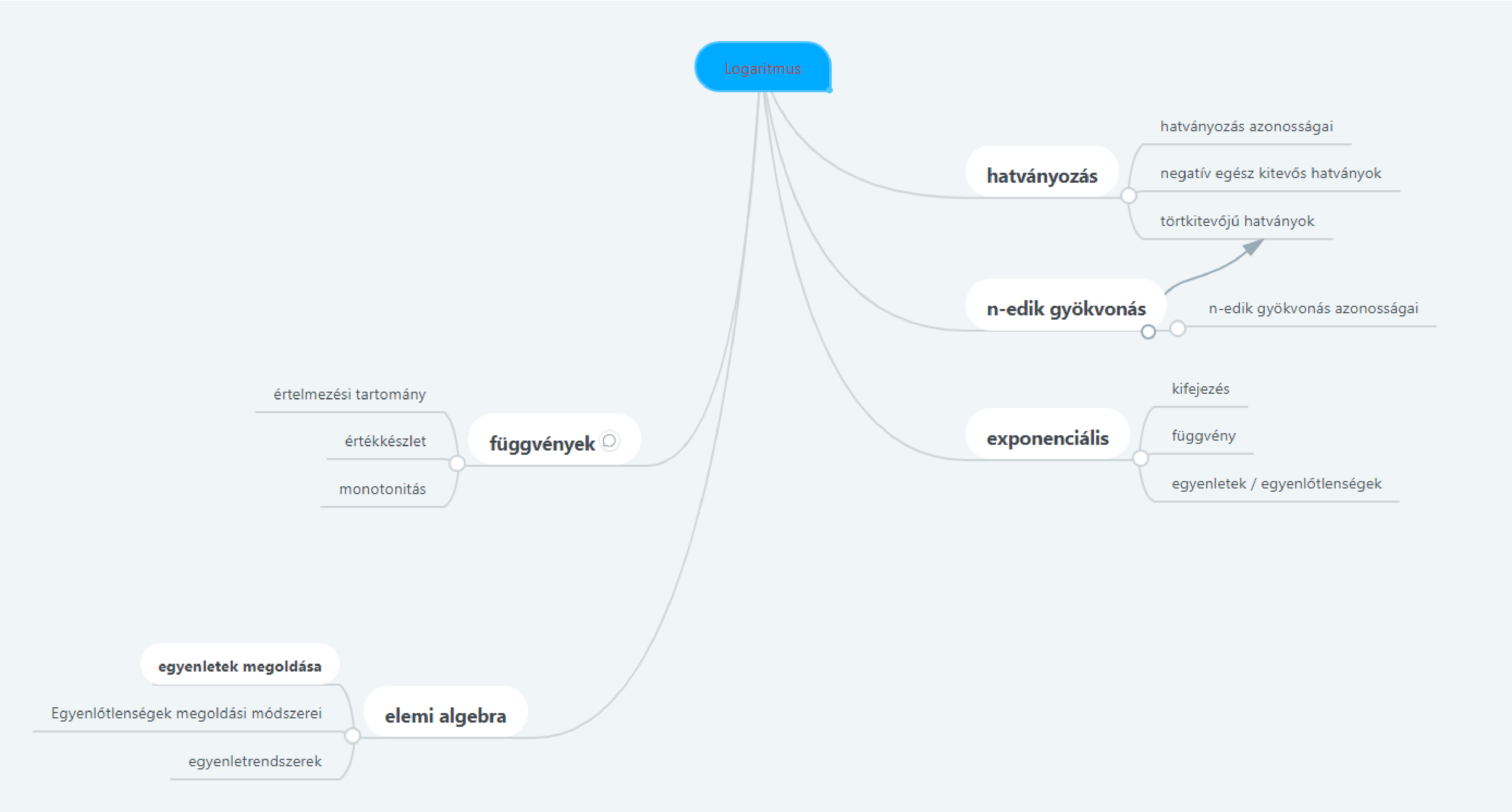
Logaritmus gondolattérkép

Jantner Anna, Sógor Tamás, Polák Péter



Óra száma	Az óra témája (tankönyvi lecke) vagy funkciója	Célok, feladatok	Fejlesztési terület	Ismeretanyag
1.	A logaritmus fogalma	Rövid ismétlés után a logaritmus fogalmának megismerése, megértése. A matematika történeti vonatkozások bemutatása.	Új fogalom alkotása, megértése, visszafelé gondolkodás (inverz művelet)	Logaritmus, 10-es alapú logaritmus
2.	A logaritmusfüggvény	A logaritmus függvény megismerése, ábrázolása (számítógépes programok (pl.: Geogebra) segítségével is), jellemzése	Függvényábrázolás, IKT képesség fejlesztése, az inverzfüggvény tulajdonságainak megértése	Logaritmus függvény, exponenciális függvény, inverz függvény
3.	Logaritmus azonosságai	A logaritmus azonosságainak megismerése, alkalmazása, kapcsolat a hatványozás azonosságaival	A korábban tanultak felidézése, kapcsolatok felfedezése	Szorzat, tört, hatvány logaritmusa
4.	Gyakorló óra	Az eddig tanultak gyakorlása, az ismeretek elmélyítése	Az összefüggések felfedezése, a definíciók megértése (pl melyik szám 5-ös alapú logaritmusa egyenlő 4) Kooperatív képességek fejlesztése	Logaritmus, logaritmusfüggvény, logaritmus azonosságai

Óra száma	Az óra témája (tankönyvi lecke) vagy funkciója	Célok, feladatok	Fejlesztési terület	Ismeretanyag
5.	Logaritmusos egyenletek	Az egyenlet megoldási módszerek felidézése, gyakorlása, értelmezési tartomány fontossága, szerepe	Algebrai kompetenciák alkalmazása, azonosságok felismerése alkalmazása.	Azonosságok
6.	Logaritmusos egyenletek (2) -	Az előző órai anyag kibővítése, az exponenciális problémákkal	Modellek alkotása, logaritmus alkalmazásával megoldható exponenciális problémák és ezek valós vonatkozásai, kooperatív készségek fejlesztése	Azonosságok, exponenciális kifejezések és a logaritmus kapcsolata (inverz művelet)
7.	Logaritmusos egyenletrendszerek	A definiciók és az azonosságok alkalmazásával megoldható egyenleterendszere k	Algebrai struktúra felismerése, modellek alkotása.	Azonosságok, megoldási módszerek
8.	Logaritmusos egyenlőtlenségek	A definiciók és az azonosságok alkalmazásával megoldható egyenlőtlenségek	Algebrai struktúra felismerése, modellek alkotása.	Azonosságok megoldási módszerek
9.	Gyakorló óra	Az ismeretek elmélyítése, összefüggések felismerése	Együttmüködési , probléma megoldási képességek fejlesztése, algebrai modell alkotás	Logaritmus azonosságai, Algebrai módszerek

Óra száma	Az óra témája (tankönyvi lecke) vagy funkciója	Célok, feladatok	Fejlesztési terület	Ismeretanyag
10.	Szöveges feladatok megoldása	Az elmélet alkalmazása, a mindennapi élethez kapcsolódó feladatokon keresztül	Szövegértés fejlesztése, összefüggések felismerése, kooperatív készségek fejlesztése	Logaritmus azonosságai, Algebrai módszerek
11-12.	Összefoglalás	Az ismeretek rendszerezése, a kapcsolatok összegzése, feladatok megoldása	Kooperatív készségek fejlesztése, probléma megoldási készségek fejlesztése, kapcsolatok felismerése, megértése	Logaritmus fogalma, logaritmusfüggvény, azonosságok, algebrai módszerek
13.	Témazáró dolgozat			
14.	A dolgozat értékelése			

Óraterv

1. Logaritmus fogalmának bevezetése

Tanár neve: Jantner Anna, Polák Péter, Sógor Tamás

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 11. osztály (Óraszám: heti 3 db)

Az óra témája: Logaritmussal megoldható szöveges feladatok

Az óra terjedelme: 45 perc

Az óra cél- és feladatrendszere:

- Az exponenciális kifejezésekkel kapcsolatos ismeretek felelevenítésé
- Probléma felvetés után a logaritmus fogalmának bevezetése
- Az új fogalom megértése. gyakorlása

Az óra didaktikai feladatai:

- **Ismétlés:** Korábban tanult ismeretanyag felidézése, exponenciális kifejezések
- **Motiváció:** életszerű probléma felvetése, matematika történeti vonatkozások megfogalmazása
- **Új ismeretanyag elsajátítása:** a logaritmus fogalmának bevezetése, frontális munkán keresztül
- **Gyakorlás:** az új fogalom mélyebb elsajátítása, megértése feladatokon keresztül csoport munkában

Tantárgyi kapcsolatok:

- Ebben az óravázlatban, csak egy kémiai példa jelenik meg
- Részletes kapcsolatok: lásd. 10. óra (másik kidolgozott óravázlat)

Felhasznált források:

- Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I.: Sokszínű Matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged 2012
- Barcza I., Basa I., Tamásné Kollár M., Kelemenné Kiss I., Bálint Zs.: Matematika 11., Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2015
- Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné dr. Simon J.: Az érthető matematika 11., Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Bp. 2015
- Dr. Gerőcs L., Számadó L.: Matematika 11., Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Bp. 2015
- Pejó Balázs: Matematika történet: http://math.bme.hu/~pbalazs/Matematika%20BSc/matematikatortenet/tetelek.pdf (letöltve: 2018.04.02.)
- Matematika történeti feldolgozás: http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/nincs-kiralyi-ut (utolsó megtekintés: 2018.04.02.)

Időkeret (perc)	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia			Megjegyzések
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
00-02	Köszönés, adminisztráció			Laptop, e-napló	
03-10	Korábban tanultak felelevenítése (exponenciális kifejezések, azonosságok)	Egyéni munka egy Kahoot teszt vagy interaktív táblás feladat alapján. A felmerülő kérdések megvitatása frontálisan.	Okostelefonon, tableten követik a feladatokat a tanulók	Laptop, internet, okostelefonok, tabletek (I.melléklet)	Ugyan ez az anyag az előző témazáró anyaga volt, mégis fontos az ismeretek felelevenítése, a felmerülő kérdések, problémák megbeszélése.
11-16	Rövid problémafelvetés, a matematikatörténeti vonatkozások alapján, megmutatva, hogy a témának vannak hétköznapi vonatkozásai is.	Frontális osztálymunka, a pedagógus elmondja a logaritmus felfedezésének rövid történetét, amelyben felmerül a kamatos kamat, mint alapgondolat, megmutatva egy hétköznapi vonatkozást.	Figyel a pedagógusra, esetleg néhány gondolatot jegyzetel	A rövid összefoglalás, amit a pedagógus elmond (II.melléklet)	A pedagógusnak röviden és érdekfeszítően kell elmesélnie a történetet, hogy valóban motiváló hatása is legyen. Ha esetleg olyan az osztály lehet más jellegű motiváló példát felhozni (pl.: Radiokarbon kormeghatározás)
17-25	A logaritmus definiálása, közös feladat megoldás.	Frontális osztálymunka, az új definíciót a tanár mondja ki, majd néhány példa feladatot megold a táblánál.	A diákok, figyelnek, jegyzetelnek, ha szükséges kérdeznek, a tanári kérdésekre válaszolnak.	Tábla, kréta, filctoll Füzet, íróeszköz	A tanárnak oda kell figyelnie arra, hogy mindenki megértse az új fogalmat, a gyorsabban haladók kaphatnak plusz feladatokat, hogy ne unatkozzanak. A felmerülő kérdésekre minden esetben körültekintően kell válaszolnia.

Időkeret (perc)	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia			Megjegyzések
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
26-35	Gyakorló feladatok megoldása	Páros munka A tanár külső megfigyelő, akkor avatkozik be, ha valamelyik páros elakad, segítségre szorul.	A diákok a padtársukkal megbeszélik a feladatok megoldásit, a felmerülő kérdéseket megvitatják, esetleg a pedagógushoz fordulnak segítségért.	Füzet, íróeszköz A kiadott feladatok listája: (III.melléklet), ezt akár feladatlapként is megkaphatják a diákok.	A biztosított idő alatt, több feladat megoldása is elvárható A feladatok között találhatóak könnyebbek és nehezebbek is, ami lehetőséget ad differenciálásra. A tanárnak oda kell figyelnie arra is, hogy mindenki dolgozzon, illetve a felmerülő kérdésekre válaszolnia kell.
35-43	A párosmunka során felmerült problémák közös megbeszélése	frontális osztálymunka tanulói aktivizálással	A diákok felteszik kérdéseiket, melyeket nem sikerült megoldaniuk a közös munka során. A pedagógus az általa problémásnak ítélt feladatokat felírja a táblára.	tábla, kréta, filc feladatlap, füzet, íróeszköz	A tanár törekedjen arra, hogy ne ő válaszolja meg a problémás kérdéseket, hanem bíztassa az osztálytársakat a segítségnyújtásra.
43-45	Házi feladat, óra zárás	frontális munka	A diákok a füzetben feljegyzik a házi feladatok sorszámát.	feladatlap, füzet, íróeszköz	A tanár kijelöli a megoldandó feladatokat, esetleg biztosít választható feladatokat.

Melléklet tartalma:

I. melléklet: Kahoot link: https://create.kahoot.it/l/#/preview/65658ab7-b474-4e9b-ab4a-092ac1c2f5d7
II. melléklet: A motivációs történet
III. melléklet: A feladatlap

Megjegyzés: a feladatlap hosszú, a célja, hogy legyen elegendő feladat az órára és házi feladatnak is. A csoportnak megfelelően néhány példát együtt oldanánk meg, néhányat ők páros munkában, és kapnának belőle házi feladatot is.

II. melléklet: A motivációs történet

A mai óra elején utazzunk vissza egy kicsit a középkorba. Abban az időben a számolás még sokkal nagyobb kihívásokat tartogatott a matematikával foglalkozóknak, mint manapság. Képzeljetek el, hogy nagyon sok szorzást például összegre bontással oldottak meg. Ugyanakkor az osztást nem tudták egyszerűbb „alakra” hozni. A sok hosszadalmas és fáradtságos számolás motiválta a matematikusokat egy egyszerűbb művelet bevezetésére. Ezt ma logaritmusnak nevezzük.

„A LOGARITMUS FELTALÁLÁSA

A logaritmusszámolás Bürgi és Napier szellemét és hihetetlen szorgalmát dicséri.

Joost Bürgi (1552-1632) a svájci Lichtensteigben született. Híres órás- és műszerkészítő mesterként dolgozott Kasselban és 1603-tól 1622-ig Kepler mellett Prágában. Itt sokat segített a világhíres csillagásznak nemcsak az eszközök javításával, hanem csillagászati megfigyelésekkel és számításokkal is. Éppen a hosszadalmas és unalmas számítások elkerülése végett készítette el 1603 és 1611 között az első logaritmustáblázatot. Mintául vette Stevin kamatoskamat-táblázatát, amelyben az

$(1+p100)^n$
értékei szerepeltek a p kamatláb és az n év különböző eseteiben. Így a

$T_n=t(1+p100)^n$
képlet használatánál csak egyetlen szorzást kellett elvégezni. (A képletben T_n a t kezdeti tőkének a p százalék mellett n év alatti kamatos kamataival felszaporodott értéke.) Rögzített p esetén az $(1+p100)^n$ tényező egy mértani sorozatot definiál. Bürgi ebből indult ki. Tudta, hogy minél kisebb p értéket választ, annál sűrűbben nyeri a sorozat elemeit. Nála p = 0,01. Az így kapott mértani sorozat minden eleméhez hozzárendelte a 0, 10, 20, 30, … számtani sorozat egy-egy elemét. A számtani sorozat elemei a nyomtatásban pirosak, a mértanié pedig feketék voltak. Így például bármelyik két fekete szám szorzatához a megfelelő két piros szám összege tartozik. A mai szóhasználattal élve: bármely fekete szám logaritmusa az alatta levő piros szám.
Bürgi táblázata 1611-ben készen volt, de Kepler szorgalmazása ellenére is csak késedelmesen, 1620-ban látott napvilágot az Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen (Aritmetikai és geometriai haladvány-táblázatok). A közlés elsőségét tehát Bürgi elvesztette, mert 1614-ben már megjelent

John Napier (1550-1617) skót matematikusnak a Mirifici logarithmorum canonis descriptio (A csodálatos logaritmustáblázat leírása, röviden: Descriptio) című összeállítása. Ebben a 0º-tól 90º-ig növekvő szögek trigonometrikus számainak a 8 jegyű logaritmusai találhatók, miközben a szög 1'-es ugrásokkal változik. A táblázat elkészítési módjának az alapötlete, amelyre Napier 1594-ben jött rá, új volt. A sorozatok összehasonlításának régi módszere mindig diszkrét értékek sorozatát adta, habár ezeket tetszőlegesen lehetett sűríteni. A skót tudós azonban két elképzelt mozgásból indult ki (Galilei előtt!), és két folytonos függvény között létesített kapcsolatot (a modern analízis fegyverei nélkül!). A logaritmus szót Napier készítette a görög logosz = arány és az arithmosz = szám szavak összevonásával. A szó latinos alakja, a logaritmus tehát viszonyszámot, arányszámot jelent. Ha az így meghatározott Napier-féle logaritmust „Naplog”-nak rövidítjük, akkor

y = Naplog x.

Napier teljesen tisztában volt felfedezésének jelentőségével, hiszen életének több mint 20 évét áldozta arra, hogy táblázata 1614-ben megjelenhessék. A táblázat elkészítésének részletezését tartalmazó Mirifici logarithmorum canonis constructio (röviden Constructio = szerkesztés, felépítés) csak halála után, 1619-ben jelent meg”

III. melléklet: A feladatlap:

Ne feledjétek a *-gal jelölt feladatok mindig szorgalmi, plusz feladatok! A feladatokban az „e”, most nem szám, hanem ismeretlen.

1. Feladat: Számítsuk ki a logaritmusok értékeit!
   a. $\log_3 1$
   b. $\log_3 9$
   c. $\log_9 3$
   d. $\log_5 \frac{1}{5}$
   e. $\log_8 16$
   f. $\log_{\sqrt{2}} 2$
   g. $\lg 1000$
   h. $\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9}$

2. Számítsuk ki a következő hatványokat!
   a. $3^{\log_3 15}$
   b. $10^{\lg 4}$
   c. $3^{\log_9 25}$
   d. $11^{\log_{\frac{1}{11}} 3}$
   e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 15}$
   f. $7^{1+\log_{49} 8}$

3. Határozzuk meg a logaritmusok alapjait!
   a. $\log_a 9 = 2$
   b. $\log_b 10000 = 4$
   c. $\log_c 3 = \frac{1}{2}$
   d. $\log_d \frac{1}{4} = -2$
   e. $\log_e x^3 = \frac{1}{3}$ $(x > 3)$
   f. $\log_f 25 = -\frac{3}{2}$
   g. $\log_g \frac{9}{4} = -2$
   h. $\log_h (-7) = 2$

4. Írd át az alábbi egyenleteket hatványalakba és számítsd ki, melyik számot jelöli *k* betű!
   a. $\log_k 25 = 2$
   b. $\log_5 k = 3$
   c. $\log_4 4 = k$

5. * Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát! Ahol szükséges ábrázold számegyenesen a megoldás halmazt.
   a. $\lg(2a+1)$
   b. $\log_2(15-3b)$
   c. $\frac{\lg(5c+10)}{c+1}$
   d. $\log_3(d^2-7d)$
   e. $\frac{\lg(-e^2+11e-24)}{e-4}$
   f. $\log_{f-2}(-f^2+8f)$

6. * Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. λ az anyagra jellemző bomlási állandó. A rádium bomlási állandója: $\lambda = 4,279 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{év}}$.Mennyi idő múlva bomlik el a rádiumatomok fele?
Keressetek radióaktív anyagokat, bomlási állandóakkal! Melyeknek van a mindennapi életben is nagy jelentősége?

Óraterv

10. Logaritmussal megoldható szöveges feladatok

Tanár neve:	Jantner Anna, Polák Péter, Sógor Tamás
Műveltségi terület:	Matematika
Tantárgy:	Matematika
Osztály:	11. osztály
Az óra témája:	Logaritmussal megoldható szöveges feladatok
Az óra terjedelme:	45 perc

Az óra cél- és feladatrendszere:

- A logaritmus azonosságainak felelevenítése (központi szerepben: a hatvány logaritmusa)
- Szöveges feladatok értelmezése, matematikai modellalkotás
- Mérlegelvvel történő egyenletmegoldás gyakorlása
- Logaritmus azonosságainak beépítése az egyenletmegoldó stratégiák közé
- Logaritmus használatával megoldható szöveges feladatok felismerése, kategorizálása

Az óra didaktikai feladatai:

- **Ismétlés:** Korábban tanult ismeretanyag felidézése, logaritmus azonosságai
- **Motiváció:** életszerű feladatok megoldása, gyakorlati alkalmazások
- **Tudatosítás:** a logaritmus széleskörű alkalmazhatósága, tantárgyi kapcsolatok fontossága

- **Pályaorientáció:** a jól megválasztott biológiai, fizikai, kémiai, szociológiai feladatokkal befolyással lehetünk a diákok érdeklődési körére, pályaválasztására

Tantárgyi kapcsolatok:

- **biológia**: baktériumtenyészet, populáció és egyedszám kapcsolata, hallás funkciója – a decibel az erő logaritmusának és az amplitúdó logaritmusának aránya, nautilus héja (logaritmikus spirál)
- **fizika**: aszfalt hőmérsékletváltozása, lézersugarak intenzitása
- **kémia**: radioaktivitás, bomlási és felezési idő, szénizotópos kormeghatározás, vizes oldatok kémhatásának (pH) kapcsolata a logaritmussal
- **pénzügy, közgazdaságtan**: banki kamatszámítás, futamidő és törlesztőrészletek kiszámítása
- **informatika:** 2-es alapú logaritmus fontossága, bonyolultságelmélet (algoritmusok végrehajtásának idejét vizsgáljuk)
- **zene:** hangmagasságok frekvenciája, hangközök logaritmikus aránya, hangszerek egyenletes hangolása

Felhasznált források:

- Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vincze: *Sokszínű Matematika 11*. Mozaik Kiadó, Szeged, 2006.
- Árki-Konfárné-Kovács-Trembeczki-Urbán: *Sokszínű Matematika Felatagyűjtemény 11-12*. Mozaik Kiadó, Szeged, 2016
- Logaritmus alkalmazásainak részletes listája: https://hu.wikipedia.org/wiki/Logaritmus#Alkalmaz%C3%A1sok (Letöltve: 2018.03.30.)
- Logaritmussal megoldható életszerű szöveges feladatok: http://kolgy-matek.hu/gyorsmenu/11-evfolyam/hatvany-gyok-logaritmus/ (Letöltve: 2018.03.29.)

Időkeret (perc)	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia			Megjegyzések
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
00-02	Köszönés, adminisztráció			laptop, e-napló	
03-10	Házi feladatok megbeszélése	frontális osztálymunka (önként jelentkező diákok a táblánál)	házi feladat ellenőrzése a füzetben, problémás kérdések feltevése	tábla, kréta, táblafilc előző órán kiosztott gyakorló feladatlap	A tanár törekedjen arra, hogy ne ő oldja meg a problémás házi feladatokat, hanem önként jelentkező diákot hívjon ki. Csak elakadás esetén segítsen, motiváljon.
11-22	*Logaritmussal megoldható szöveges feladatok* című feladatlap kiosztása Két mintafeladat közös megbeszélése (az egyik mindenképpen banki futamidőszámítás, a másik egy szabadon választott természettudományos feladat legyen)	frontális osztálymunka tanári felvetéssel, a gyerekek folyamatos aktivizálásával	A szöveges feladatok alapján kitalált ötletek brainstorming-jellegű megosztása a tanárral és a csoporttal	tábla, kréta, táblafilc *Logaritmussal megoldható szöveges feladatok* című feladatlapok fénymásolva füzet, íróeszköz	Tanár ne felejtse el az óra előtti fénymásolást (legalább annyi példányban, ahányan az osztályban vannak) A tanár jutalmazza plusszal, kisötössel azt a diákot, aki a kitevőben szereplő ismeretlent a logaritmus azonosságai segítségével alakítja át. A tanár hangsúlyozza ki, hogy a logaritmussal megoldható szöveges feladatok legfontosabb mozzanata a kitevőre vonatkozó azonosság

					használata. A gyerekek ezt emeljék ki, húzzák alá.
23-25	Tanulócsoportok kialakítása a diákok érdeklődési körének megfelelően	Kooperatív csoportmunka előfeltételeinek kialakítása A tanár a teremben kijelöli a „biológia, fizika, kémia, pénzügy, szociológia” zónákat és megkéri a diákokat, hogy minden zónában 3-6 fős csoportok alakuljanak.	A diákok érdeklődési körüknek megfelelően választanak egy zónát.	füzetet, íróeszközt és feladatlapot visznek magukkal a gyerekek az új helyükre	A tanár kezelje rugalmasan a csoportok létszámát. Nem baj, ha az egyik zónában többen/kevesebben vannak. Létszámtól függően több egyforma zóna is létrejöhet (pl. két biológia, két kémia)
26-34	Feladatmegoldás a kiosztott feladatlapról	kooperatív csoportmunka A tanár a háttérből figyeli a csoportok munkáját, elakadás esetén segítséget nyújt, motivál.	A diákok a zónájuknak megfelelő blokkból választanak 1 feladatot, melyet közösen oldanak meg a csoporttársaikkal.	az óra elején kiosztott feladatlap füzet, íróeszköz	8 perc alatt 1 szöveges feladat megoldása elvárható. Differenciálásra ad lehetőséget, hogy a feladatlapon több tematikus feladat található, az ügyesebb, gyorsabb csoportok haladjanak tovább.
35-43	A csoportmunka során felmerült problémák közös megbeszélése	frontális osztálymunka tanulói aktivizálással	A diákok felteszik kérdéseiket, melyeket nem sikerült megoldaniuk a közös csoportmunka során.	tábla, kréta, filc feladatlap, füzet, íróeszköz	A tanár törekedjen arra, hogy ne ő válaszolja meg a problémás kérdéseket, hanem bíztassa az osztálytársakat a segítségnyújtásra.
44-45	Házi feladat	frontális munka	A diákok a füzetben feljegyzik a házi	feladatlap, füzet, íróeszköz	A tanár most ne konkrét feladatszámokat

			feladatok sorszámát a kiosztott feladatlapról.		határozzon meg, hanem adjon választási lehetőséget a házi feladatok során. (pl. 3 szöveges feladat megoldása kötelező 2 különböző tematikus blokkból)

Megjegyzés: *A Logaritmussal megoldható szöveges feladatok* című feladatlap feladatbankként kezelendő, a tanár rugalmasan válogathat a gyűjteményből a csoport érdeklődésének, tudásszintjének megfelelően. Feldolgozása az óratervben kidolgozott órán kezdődhet és a tanmenetben következő gyakorlóórán folytatható.

Melléklet tartalma: *Logaritmussal megoldható szöveges feladatok* című feladatlap

Melléklet – Logaritmussal megoldható szöveges feladatok

Pénzügyi számítások, futamidő

01. Betettünk a bankba 3 millió forintot évi 2%-os kamatos kamatra. Ha nem nyúlunk hozzá a pénzünkhöz és eltekintünk a kezelési költségektől, akkor hány év múlva éri el a pénzünk a 6 millió forintot?

02. Az 1,5 millió forintos betétállomány 7%-os kamat esetén hány év alatt növekszik 3 millió forintra?

03. Hány év alatt duplázódik meg a 2,5 millió forintos betétállomány, ha évenkénti tőkésítéssel évi 6% kamatot ad a bank?

Biológia

04. Egy baktériumtenyészet generációs ideje 25 perc, ami azt jelenti, hogy ennyi idő alatt duplázódik meg a baktériumok száma a tenyészetben. Kezdetben 5 milligramm baktérium volt a tenyészetben. Hány perc múlva lesz a tenyészetben 30 milligramm baktérium?

05. Egy biológiai kísérlet során baktériumokat szaporítanak. Azt tapasztalják, hogy megfelelő körülmények között a baktériumállomány 6 óra alatt megduplázódik. A kísérlet kezdetén 1000 baktérium volt.

    a, Mennyi baktérium volt a kísérlet kezdete után 2 nappal?
    b, A kísérlet addig tart, amíg a baktériumok száma el nem éri a 10^9 darabot. Mennyi ideig folyik a kísérlet?

06. Egy tóba honosítás céljából 500 darab csíkos sügért telepítettek 2005 márciusában. A halbiológusok figyelemmel kísérték az állomány gyarapodását és azt találták, hogy a halak száma a $h(t) = 500 * log_3(2t + 3)$ függvénnyel írható le, ahol t a telepítéstől eltelt évek számát jelenti.

a, Mennyi csíkos sügér élt a tóban 2006 márciusában?
b, Várhatóan mikor éri el a halpopuláció az 1500 darabot?

Kémia

07. A pH egy dimenzió nélküli kémiai mennyiség, mely egy adott oldat kémhatását jellemzi. Híg vizes oldatok esetén a pH egyenlő az oxóniumion-koncentráció (mol/dm^3) tízes alapú logaritmusának ellentettjével: pH = -lg(H_3O^+).

a, Egy testápolót úgy reklámoznak, hogy a pH-értéke 5,5. Mennyi az oxóniumion-koncentráció ebben az oldatban?
b, Egy oldatban az oxóniumion-koncentrációt a 100-szorosára növeljük. Hogyan változik az oldat pH-értéke?

08. Adott pillanatban m_0 tömegű radioaktív anyagból t idő múlva $m(t) = m_0 * e^{-kt}$ tömegű bomlásra képes radioaktív anyag lesz, ahol k az anyagra jellemző állandó. A 14 tömegszámú szénizotóp radioaktív és felezési ideje 5715 év. Egy lelet vizsgálatánál 12 g szénből 4 g volt radioaktív. Körülbelül hány éves a lelet?

Fizika

09. A kísérletekkel is alátámasztott lehűlési törvény szerint az ahhoz szükséges idő, hogy egy T_0 hőmérsékletű tárgy, K hőmérsékletű környezetben, T hőmérsékletre lehűljön, $t = k * ln\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right)$, ahol k a lehűlő anyagra jellemző állandó, az időt percben kapjuk.

a, Mennyi idő alatt hűl le a 85°C hőmérsékletű sült malac 70°C hőmérsékletre, ha a lakás hőmérséklete 21°C és k = 12,5?
b, Mennyi idő alatt hűl le 38°C hőmérsékletre a fenti malac?
c, Mennyi idő alatt hűl le a 100°C hőmérsékletű pogácsa 30°C hőmérsékletűre, ha a szoba hőmérséklete 19°C és k = 10,8?

Szociológia

10. A táblázat 3 év adatait tartalmazza a Magyarországon kábítószer-fogyasztással kapcsolatban bekövetkezett halálesetek számáról.

1995	**1996**	**1997**
204	288	339

Adjunk előrejelzést a 2018 évre vonatkozóan.

11. A szakszervezetek kiharcolták, hogy minden évben 5%-kal növekedjenek a bérek. Hány év alatt duplázódik meg a 130 000 forintos bér?

12. A szociológiai kutatások szerint a fejlett országokban a következő képlettel közelíthető a várható élettartam és az egy főre eső nemzeti össztermék (alias GDP) közötti összefüggés:

$$\text{É} = 75{,}5 - 5 * 1{,}081^{\frac{6000-G}{206}}$$

ahol É a várható élettartam évben, G a GDP reálértékben átszámolva 2012-es dollárra. Mennyi GDP növekedés szükséges a várható élettartam 10 évvel történő meghosszabbodásához, ha ez 70-ről 80 évre történik?

1. Számold ki!(5 pont)

a) $\log_2 4 =$ b) $lg10000 =$ c) $\log_5 \frac{1}{5} =$ d) $\log_{12345678} 1 =$
e) $3^{\log_3 4} =$

2. Mennyi d értéke? Az átalakításokat részletezd! (5 pont)

$$\frac{lgb^a - lgc}{a * lgb + lg\frac{1}{c}} = d$$

3. Ábrázold az $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvényt és elemezd az alábbi szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás! (7 pont)

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenséget! (7 + 4 + 8 pont)

a) $\log_7(x+5) = 2\log_7(x+3)$ b) $5^{2x} = 3$
c) $\log_2(x+4) - \log_2(3x+9) \geq 1$

5. Oldd meg az egyenletrendszert! (14 pont)

1) $\lg^2(x+2) + \lg y - 2 = 0$
2) $y = x + 2$

6. A Szent Máté szigetre 1944-ben 29 rénszarvast telepítettek be. A szigeten, egy darabig a rénszarvasok számának változását a következő összefüggés alapján lehetett számolni: $r(x) = 29 * 1{,}323981^x$, ahol x az 1944 óta eltelt évek száma. A szigeten azonban egy idő után nem volt elég élelem minden rénszarvas számára, és amint többen lettek, mint 6000, hirtelen csökkeni kezdett a számuk, és 3 évre rá teljesen kihaltak a szigetről. Melyik évben láthatták az utolsó rénszarvast a Szent Máté szigeten? (11 pont)

1. Számold ki!(5 pont)

a) $\log_3 27 =$ b) $\log_7 \frac{1}{49} =$ c) $lg100 =$ d) $\log_{987654321} 1 =$
e) $5^{\log_5 6} =$

2. Mennyi x értéke? Az átalakításokat részletezd! (5 pont)

$$\frac{w * lgy - lgz}{lgy^w + lg\frac{1}{z}} = x$$

3. Ábrázold az $f(x) = \log_3 x$ függvényt és elemezd az alábbi szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás! (7 pont)

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenséget! (7 + 4 + 8 pont)

a) $\log_6(4 - 4x) = 2\log_6(x + 1)$ b) $3^{2x} = 7$
c) $\log_5(2 - x) \geq \log_5(3x + 2) + 1$

5. Oldd meg az egyenletrendszert! (14 pont)

1) $\lg^2(x) - \lg(y + 1) - 6 = 0$
2) $x = y + 1$

6. A Szent Máté szigetre 1944-ben 29 rénszarvast telepítettek be. A szigeten, egy darabig a rénszarvasok számának változását a következő összefüggés alapján lehetett számolni: $r(x) = 29 * 1{,}323981^x$, ahol x az 1944 óta eltelt évek száma. A szigeten azonban egy idő után nem volt elég élelem minden rénszarvas számára, és amint többen lettek, mint 6000, hirtelen csökkeni kezdett a számuk, és 3 évre rá teljesen kihaltak a szigetről. Melyik évben láthatták az utolsó rénszarvast a Szent Máté szigeten? (11 pont)

1. Számold ki!(5 pont)

a) $\log_2 4 = 2$	1 pont
b) $lg10000 = 4$	1 pont
c) $\log_5 \frac{1}{5} =$ -1	1 pont
d) $\log_{12345678} 1 = 0$	1 pont
e) $3^{\log_3 4} = 4$	1 pont

2. Mennyi *d* értéke? Az átalakításokat részletezd! (5 pont)

$$\frac{lgb^a - lgc}{a * lgb + lg\frac{1}{c}} = d$$

$lg\frac{b^a}{c}$ átalakítás a számlálóban	1 pont
lgb^a átalakítás a nevezőben	1 pont
$lg\frac{b^a}{c}$ átalakítás a nevezőben	1 pont
egyszerűsítés és helyes végeredmény	2 pont

3. Ábrázold az $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvényt és elemezd az alábbi szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás! (7 pont)

A függvény helyes ábrázolása (kisebb hibák esetén 1 pont adható)		2 pont
értelmezési tartomány:	$x > 0$	1 pont
értékkészlet:	$y \in \mathbb{R}$	1 pont
zérushely (leolvasva vagy kiszámolva)	$x = 1$	1 pont
szélsőérték:	nincsen	1 pont
monotonitás:	sz.m.csökk.	1 pont

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenséget! (7 + 4 + 8 pont)

Egyéb, helyes megoldási útvonalak is elfogadhatóak

a) $\log_7(x+5) = 2\log_7(x+3)$

$kikötés: x > -5$ és $x > -3, tehát: x > -3$	2 pont
$\log_7(x+5) = \log_7(x+3)^2$	1 pont
a logaritmus függvény szig. mon. ezért a logaritmusok elhagyhatóak	
$x + 5 = (x+3)^2$	1 pont
(ha hiányzik a szöveg, fél pont adható)	
$x^2 + 5x + 4 = 0$	1 pont
$x_1 = -1, x_2 = -4$	1 pont
x_2 nem felel meg a kikötésnek, nem megoldás	1 pont

b) $5^{2x} = 3$

$lg5^{2x} = lg3$	1 pont
$2x * lg5 = lg3$	1 pont
$x = \frac{lg3}{2lg5}$	1 pont

$x \approx 0{,}341$ 1 pont

c) $\log_2(x+4) - \log_2(3x+9) \geq 1$

$kikötés: x > -4$ és $x > -3, tehát: x > -3$ 2 pont

$\log_2(\frac{x+4}{3x+9}) \geq 1$ 1 pont

$\log_2(\frac{x+4}{3x+9}) \geq \log_2 2$ 1 pont

a logaritmus függvény szig. mon. nő ezért a logaritmusok elhagyhatóak

$\frac{x+4}{3x+9} \geq 2$ 1 pont

(ha hiányzik a szöveg, fél pont adható)

$-\frac{14}{5} \geq x$ 2 pont

kikötés alapján: $\frac{14}{5} \geq x > -3$ 1 pont

5. Oldd meg az egyenletrendszert! (14 pont)

1) $\lg^2(x+2) + \lg y - 2 = 0$

2) $y = x + 2$

Egyéb, helyes megoldási útvonalak is elfogadhatóak

$kikötés: x > -2$ és $y > 0$ 2 pont

$\lg^2(y) + \lg y - 2 = 0$ 1 pont

$a^2 + a - 2 = 0$ másodfokú egyenletre való visszavezetés 2 pont

$a_1 = -2, a_2 = 1$ 1 pont

$\lg(y_1) = 1\ vagy \lg(y_2) = -2$ 2 pont

$\lg(y_1) = \lg(10)\ vagy \lg(y_2) = \lg(\frac{1}{100})$ 2 pont

$y_1 = 10, y_2 = \frac{1}{100}$ 2 pont

$x_1 = 8, x_2 = -\frac{199}{100}$ 2 pont

6. A Szent Máté szigetre 1944-ben 29 rénszarvast telepítettek be. A szigeten, egy darabig a rénszarvasok számának változását a következő összefüggés alapján lehetett számolni: $r(x) = 29 * 1{,}323981^x$, ahol x az 1944 óta eltelt évek száma. A szigeten azonban egy idő után nem volt elég élelem minden rénszarvas számára, és amint többen lettek, mint 6000, hirtelen csökkeni kezdett a számuk, és 3 évre rá teljesen kihaltak a szigetről. Melyik évben láthatták az utolsó rénszarvast a Szent Máté szigeten? (11 pont)

$6000 \leq 29 * 1{,}323981^x$ 3 pont

ha egyenletként írja fel 2 pont jár

$\lg(\frac{6000}{29}) \leq \lg 1{,}323981^x$ 2 pont

$\lg\left(\frac{6000}{29}\right) \leq x * \lg 1{,}323981$ 1 pont

$\frac{\lg\left(\frac{6000}{29}\right)}{\lg 1{,}323981} \leq x$ 1 pont

$19 \leq x$ 1 pont

1944 + 19 + 3 = 1966 2 pont

1966-ban láthattak utoljára rénszarvast. 1 pont

1. Számold ki!(5 pont)

a) $\log_3 27 = 3$	1 pont
b) $\log_7 \frac{1}{49}$ = -2	1 pont
c) $lg100 = 2$	1 pont
d) $\log_{987654321} 1 = 0$	1 pont
e) $5^{\log_5 6} = 6$	1 pont

2. Mennyi x értéke? Az átalakításokat részletezd! (5 pont)

$$\frac{w * lgy - lgz}{lgy^w + lg\frac{1}{z}} = x$$

$lg\frac{y^w}{z}$ átalakítás a nevezőben	1 pont
lgy^w átalakítás a számlálóban	1 pont
$lg\frac{y^w}{z}$ átalakítás a számlálóban	1 pont
egyszerűsítés és helyes végeredmény	2 pont

3. Ábrázold az $f(x) = \log_3 x$ függvényt és elemezd az alábbi szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás! (7 pont)

A függvény helyes ábrázolása		2 pont
(kisebb hibák esetén 1 pont adható)		
értelmezési tartomány:	$x > 0$	1 pont
értékkészlet:	$y \in \mathbb{R}$	1 pont
zérushely (leolvasva vagy kiszámolva)	$x = 1$	1 pont
szélsőérték:	nincsen	1 pont
monotonitás:	sz.m.nő	1 pont

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenséget! (7 + 4 + 8 pont)

Egyéb, helyes megoldási útvonalak is elfogadhatóak

a) $\log_6(4 - 4x) = 2\log_6(x + 1)$

$kikötés: x < 1 \text{ és } x > -1, tehát: 1 > x > -1$	2 pont
$\log_6(4 - 4x) = \log_6(x + 1)^2$	1 pont
a logaritmus függvény szig. mon. ezért a logaritmusok elhagyhatóak	
$4 - 4x = (x + 1)^2$	1 pont
(ha hiányzik a szöveg, fél pont adható)	
$x^2 + 6x + 5 = 0$	1 pont
$x_1 = -1, x_2 = -5$	1 pont
x_1, x_2 nem felel meg a kikötésnek, nincs megoldás	1 pont

b) $3^{2x} = 7$

$lg3^{2x} = lg7$	1 pont

$2x * lg3 = lg7$ 1 pont
$x = \frac{lg7}{2lg3}$ 1 pont
$x \approx 0,886$ 1 pont
c) $\log_5(2-x) \geq \log_5(3x+2)+1$
$kikötés: 2 > x \text{ és } x > -\frac{2}{3}, tehát: 2 > x > -\frac{2}{3}$ 2 pont
$\log_5(2-x) \geq \log_5(3x+2)+\log_5 5$ 1 pont
$\log_5(2-x) \geq \log_5(5(3x+2))$ 1 pont
a logaritmus függvény szig. mon. nő ezért a logaritmusok elhagyhatóak
$2-x \geq 5(3x+2)$ 1 pont
(ha hiányzik a szöveg, fél pont adható)
$-\frac{1}{2} \geq x$ 2 pont
kikötés alapján: $2 > x \geq -\frac{1}{2}$ 1 pont

5. Oldd meg az egyenletrendszert! (14 pont)

1) $\lg^2(x) - \lg(y+1) - 6 = 0$
2) $x = y+1$

Egyéb, helyes megoldási útvonalak is elfogadhatóak
$kikötés: x > 0 \text{ és } y > -1$ 2 pont
$\lg^2(x) - \lg x - 6 = 0$ 1 pont
$a^2 - a - 6 = 0$ másodfokú egyenletre való visszavezetés 2 pont
$a_1 = -2, a_2 = +3$ 1 pont
$\lg(x_1) = -2 \; vagy \; \lg(x_2) = 3$ 2 pont
$\lg(x_1) = \lg\left(\frac{1}{100}\right) vagy \; \lg(x_2) = \lg(1000)$ 2 pont
$x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = 1000$ 2 pont
$x_1 = -\frac{99}{100}, x_2 = 999$ 2 pont

6. A Szent Máté szigetre 1944-ben 29 rénszarvast telepítettek be. A szigeten, egy darabig a rénszarvasok számának változását a következő összefüggés alapján lehetett számolni: $r(x) = 29 * 1,323981^x$, ahol x az 1944 óta eltelt évek száma. A szigeten azonban egy idő után nem volt elég élelem minden rénszarvas számára, és amint többen lettek, mint 6000, hirtelen csökkeni kezdett a számuk, és 3 évre rá teljesen kihaltak a szigetről. Melyik évben láthatták az utolsó rénszarvast a Szent Máté szigeten? (11 pont)

$6000 \leq 29 * 1,323981^x$ 3 pont
ha egyenletként írja fel 2 pont jár
$\lg(\frac{6000}{29}) \leq \lg 1,323981^x$ 2 pont
$\lg\left(\frac{6000}{29}\right) \leq x * \lg 1,323981$ 1 pont
$\frac{\lg\left(\frac{6000}{29}\right)}{\lg 1,323981} \leq x$ 1 pont
$19 \leq x$ 1 pont
1944 + 19 + 3 = 1966 2 pont
1963-ban láthattak utoljára rénszarvast. 1 pont

osztályozás:

elégséges:	13—24p
közepes:	25—38p
jó:	39—49p
jeles:	50—61p