

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

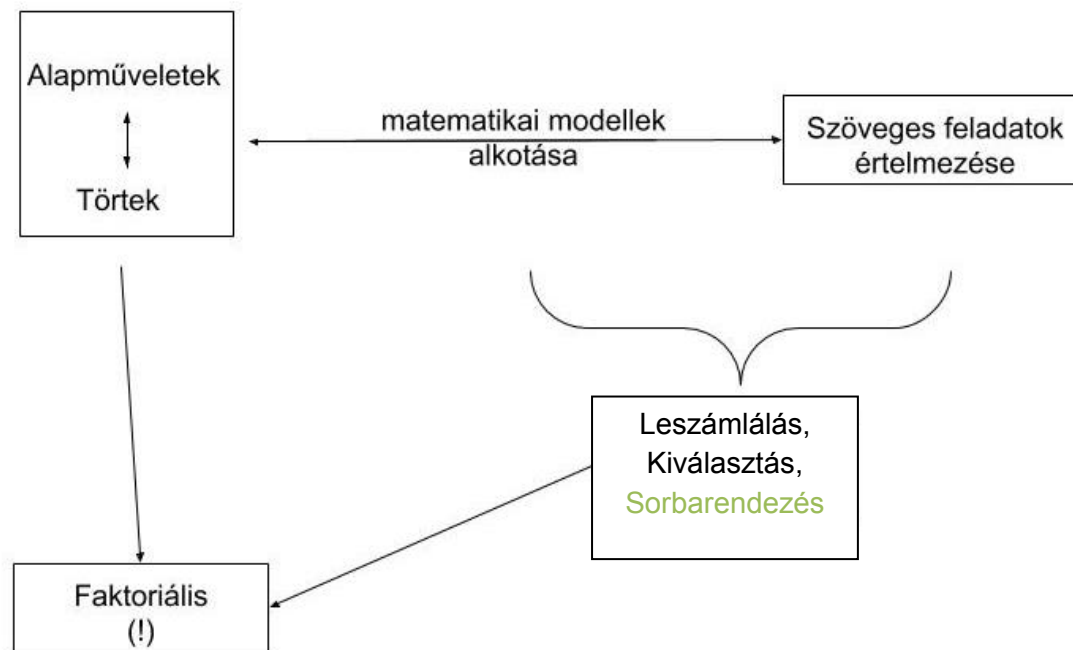
Tanmenet a kombinatorika témaköréhez

Átlagos képességű 9. Osztály számára, 4 osztályos gimnáziumban. (Heti 3 óra)

Megjegyzés: A kombinatorika, mint önálló egység nem szerepel tanmenetben. 9. Osztályban együtt tárgyaljuk a halmazelmélettel, 11.-ben pedig a gráfokkal. Az alábbi tanmenetünk a 9.-es és 11.-es tanegység részleteket tartalmazza.

Fogalmi háló, összefüggések:

9. osztályban:

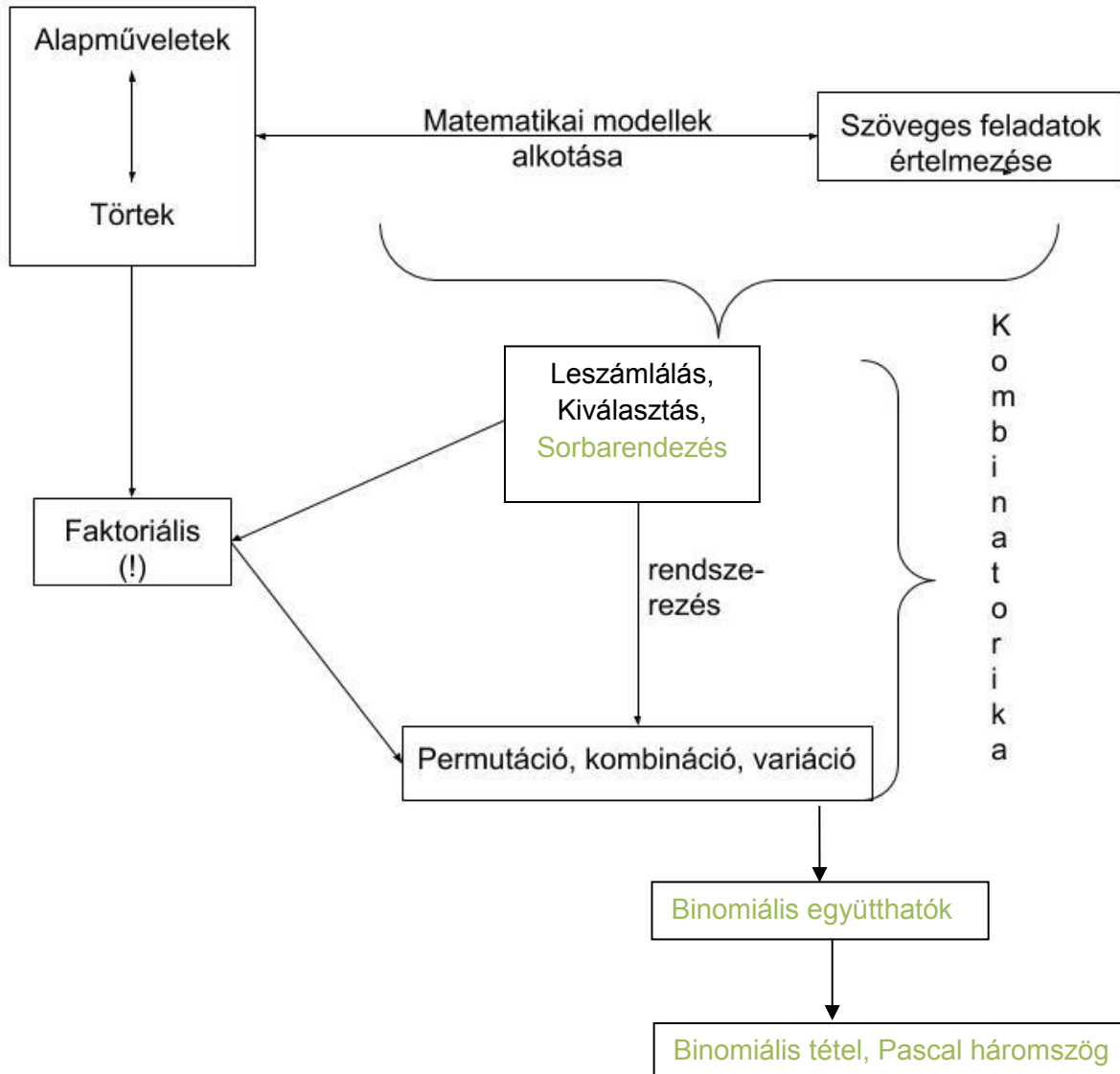


Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

11. osztályban:



Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Tanmenet:

Bevezetés 9. osztályban:

	Téma	Cél	Fejlesztési terület	Ismeretanyag
1.óra	Ismétlés / ismerkedés / bevezetés “Játékos feladatok”	egymás megismerése, játék a matematikában, játék során matematikai modellezés	kooperáció, kommunikáció, együttműködés	leszámlálás, sorbarendezés
2.óra	Leszámlálási feladatok (ism. nélk. perm./var. DE nincs kimondva)	matematikai modellezés, számolási készség fejlesztése	szövegértés, logikai gondolkodás	leszámlálás, sorbarendezés, faktoriális
3.óra	Leszámlálási feladatok (ismétlése perm./var. DE nincs kimondva)	matematikai modellezés, számolási készség fejlesztés	szövegértés	leszámlálás, sorbarendezés
4.óra	Dolgozat (20 perc) +Értékelés (óra végén, vagy következő órán)			

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Bevezetés 11. osztályban:

	Téma	Cél	Fejlesztési terület	Ismeretanyag
1.óra	Ismétlés	korábbi ismeretek felelevenítése	ismeretanyag tudatos használata	leszámlálás, sorbarendezés, (9. osztályban tanultak)
2.óra	Permutáció Variáció (ismétléses és ismétlés nélküli)	korábbi ismeretek újragondolása, új fogalom megismerése	ismeretek rugalmas alkalmazása, többféle megoldás keresése	permutáció, variáció , faktoriális Erdős Pál életét megemlíteni (díjai, nagy magyar matematikus) Anagrammák földrajzi nevekkkel
3.óra	Permutáció és variáció gyakorlása	fogalmak alkalmazása	matematikai modellezés; képletek alkalmazása, felismerése, többféle megoldás keresése	variáció, permutáció
4.óra	Kombináció (ismétléses és ismétlés nélküli) már benne van a középszintű érettségi követelményekben	korábbi ismeretek újragondolása, új fogalom megismerése, eddig fogalmak gyakorlása	képletek tudatos alkalmazása, többféle megoldás keresése	kombináció, variáció , permutáció
5.óra	Binomiális tétel Pascal-háromszög	Binomiális tétel alkalmazása egyszerű feladatokban	Modell alkotás, képlet alkalmazása	Pascal-háromszög Binomiális tétel Pascal élete
6.óra	Ismétlés, Gyakorlás	megfelelő képlet kiválasztása, alkalmazása	logikus gondolkodás, többféle megoldás ker.	permutáció, variáció, kombináció
7-8.óra	Dolgozat, Értékelés			

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Óraterv-Bevezetés

Osztály: 9. Osztály

Témakör: Kombinatorika

Téma: Bevezetés - leszámolás, kiválasztás

Foglalkozás menete	Szervezési módok, eszközök	Idő (perc)
Ráhangelődés: Köszöntés, adminisztráció	Frontális munka	1'
Ismerkedés: 9. osztály első matematika óra. Ismerkedés a tanárral, a tanulókkal.	Tanulók egyesével bemutatkoznak, mondanak pár szót magukról, és a tantárgyhoz fűződő viszonyukról. Ugyanígy a tanár is	15'
Ráhangelődő játék: Feladat: Három ló, Tornádó (T), Szélvész (S) és Villám (V) versenyeznek. Hány különböző végeredmény születhet? (Az eredeti feladat megengedi a holtverseny lehetőségét, de ez túl sok lehetőséget jelent a játékos megoldás szempontjából.)	A tanár előre elkészített (2. melléklet)(akár színes, laminált) papírokat oszt ki a T, S és V betűkkel feliratozva. Minden diák kap egy betűt, többen is ugyanazt. 1. Hármass csoportokba rendeződnek, minden csapatban különböző betűk legyenek. 2: Maguk között kialakítanak egy olyan sorrendet, amely lehetőleg nem szerepel másik csapatnál. Szükséges: - Diákrészlől: kommunikáció kis csoporton belül és a csoportok között is. - A tanár részéről: fontos az előkészítés, a feladat osztálylétszámhoz való igazítása, az óra kezdetén a hiányzó ismeretében felülvizsgálni, esetleg újratervezni a feladatot. (Több ló(ehhez több kártya is kell), kettes vagy hármass holtverseny számításba vételével)	15'
Tanulságok megbeszélése: Lehetséges sorrendek száma, alkalmas leszámolási technikák megbeszélése.	A csapatok egyesével elmondják a náluk kialakult sorrendet, a tanár a táblán jegyzetel. Ezt követően közösen megbeszéljük, az osztály milyen taktikával alakította ki az összes sorrendet, ezt hogyan lehet egy személyként megtenni füzetben, helyes leszámolási	10'

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

	technikák összegyűjtése közösen (esetekre bontás helyezések szerint, lovak szerint, felsorolás vagy ágrajz készítése)	
Feladatmegoldás	Az 1. mellékletben szereplő feladatokat kezdjük el megoldani. A házi feladatnak szánt 3. példa elkezdhető az óra végén Feladható szorgalmiként, hogy gondolkozzanak el, hogy leírogatás nélkül is megadható-e az összes lehetőség.	15'
Az óra lezárása	Az óra fontosabb tanulságait beszéljük át újra, adjuk ki a házit.	4'

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

1. melléklet:

1.

Az olimpiai ötkarika öt színnel: sárga, piros, kék, zöld és fekete színnel van kiszínezve. Ha tetszés szerint színezhajjuk a karikákat, akkor hányféle színezés lehetséges?

2.

Négy barátnő a cukrászdában négyféle süteményt rendelt: Anna csokitortát, Bori gesztenyés kockát, Cili japán tortát, Dóri pedig gyümölcstortát. A pincér azonban elfelejtette, hogy ki mit rendelt, és nem kérdez semmit, csak kiosztja a süteményeket.

a) Hányféleképpen teheti ezt meg?

b) Hányféleképpen lehetséges, hogy Anna, Bori és Cili azt kapja, amit rendelt, de Dóri nem?

c) Hányféleképpen lehetséges, hogy csak Anna kapja azt, amit rendelt?

d) Hányféleképpen lehetséges, hogy csak egyikük kapja azt, amit rendelt?

3. (Egyben a maradék feladatrész házi feladat.)

A következő szavak betűikre estek szét (a dupla betű két betűre), és a betűk összekeveredtek. Hányféle sorrendben írhatjuk le őket? Keressünk köztük minél több értelmes szót!

a) RÉT b) ERDŐ c) MÉTER d) KAROM

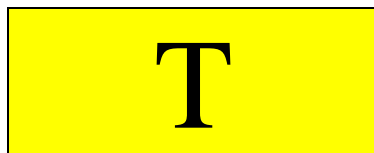
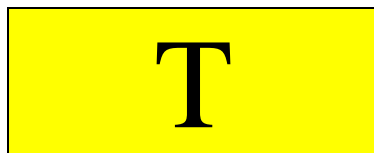
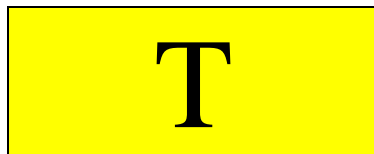
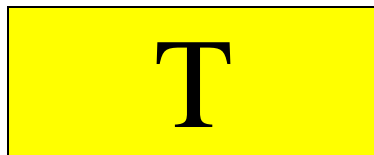
e) SZAMÁR

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

2. melléklet



Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Óratervezés-Gyakorlás-Összefoglalás

Osztály: 11. Osztály

Témakör: Kombinatorika

Téma: Gyakorlás - Ismétléses és ismétlés nélküli kombináció, variáció, permutáció

Foglalkozás menete	Szervezési módok, eszközök	Idő (perc)
Ráhangelődés: Köszöntés, adminisztráció	Frontális munka	1'
Házi feladat ellenőrzések: Feladatok közös ellenőrzése, problémás feladatok megbeszélése.	Egy-egy tanuló elmondja a megoldását a feladatoknak, táblánál levezeti.	8'
Kombinatorikai fogalmak összegyűjtése: Fogalmak és képletek felelevenítése Mikor melyik eset áll fenn? <u>Számít a sorrend?</u> IGEN: permutáció vagy variáció <i>Az összes elemet sorba rendezzük vagy csak egy részét?</i> ÖSSZESET: permutáció CSAK EGY RÉSZÉT: variáció NEM: kombináció Lehetnek e egyforma elemek? IGEN: ismétléses NEM: ismétlés nélküli	Brain-Storming	5'
Gyakorlás: Gyakorló lap kiosztása (a táblázat alatt mellékelve)	Páros munka, feladatok megoldása Tantárgyi koncentrációs feladatokkal*	20'
Feladatok megbeszélése: Gyakorló lap feladatainak közös megbeszélése	Egy-egy tanuló a táblánál elmondja a feladat megoldását	10'

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Házi feladat kiadása, elkészítés: A gyakorló lap megmaradt feladatai, gyakorlás a dolgozatra Elkészítés		1'
--	--	----

*Földrajz: Földrajzi területek nevével anagrammák

Ének: Bartók zenei műveiben permutációk figyelhetők meg (órán elhangzott javaslat)

Magyar nyelv és irodalom: Versekben rímképlet

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Gyakorló lap - Kombinatorika

ÖSSZEFOGLALÓ TÁBLÁZAT

	Ismétlés nélküli	Ismétléses
Permutáció	n különböző elem sorba rendezése Pl.: 5 tanuló érkezik egyszerre a büféhez. Hányféleképpen állhatnak sorba?	n elem sorba rendezése, ha vannak köztük egyformák is Pl.: Hányféleképpen lehet sorba rendezni 6 piros és 4 fekete golyót?
Variáció	Különböző elemek közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy a sorrend számít Pl.: Egy 14 fős csoportban hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet kiosztani, ha mindenki 1 könyvet kaphat?	Különböző fajta elemek közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy a sorrend számít Pl.: Egy 5 fős társaságban 2 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?
Kombináció	Különböző elemek közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy a sorrend nem számít Pl.: Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?	Különböző fajta elemek közül kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy a sorrend nem számít Pl.: Egy 18 fős társaság vezetőt választ 4 jelölt közül. Mindenki 1-1 jelöltre szavazhat. Hányféle szavazási eredmény születhet?

Feladatok:

1. Matekból, irodalomból, történelemből és informatikából kell házi feladatot készítenem. Hányféle sorrendben tehetem ezt meg?
2. Hányféle kilencjegyű, 5-tel osztható szám készíthető a 0, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6 számjegyekből?
3. Egy 36 fős osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy minden tanuló csak egy tárgyat kaphat. Hányféleképp végződhet a sorsolás?
4. 1990 előtt két betű – négy szám típusú rendszámuk volt a gépjárműveknek. Hányféle rendszám volt létrehozható, ha a magyar ábécé 26 egyjegyű betűjét és bármilyen számjegyet használhatunk fel? Hányféle három betű – három szám típusú rendszámot lehet létrehozni?
5. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó egyforma oklevelet?
6. Háromféle gyümölcsből szeretnénk 1-1 kg-ot vásárolni a piacon, ahol a gyümölcsök közül almát, körtét, sárgadinnyét, szilvát és őszibarackot árulnak. Hányféleképp végződhet a vásárlás?
7. Négy házaspár lép be egy szobába, az ajtón egyszerre legfeljebb egy ember tud belépni.
 - a) Hányféle sorrendben juthatnak be a szobába?
 - b) Hányféle sorrendben mehetnek be, ha két egymást követő belépő ember csak különböző nemű lehet?
 - c) Hányféle sorrendben mehetnek be, ha nő az első, és minden nőt a férje követ?

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

8. Hányféle sorrendben írhatók le a MATEMATIKA szó betűi?
9. 8 lányból és 10 fiúból hányféleképpen lehet összeállítani a lehető legtöbb egyszerre táncoló párt (fiú-fiú és lány-lány pár is táncolhat)?
10. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk. Hányféleképpen lehetséges ez?
11. Csenge vacsorára hívta 7 barátját. Hányféleképpen ültetheti le őket a kör alakú asztalhoz, ha Réka Csenge mellett szeretne ülni?
12. Sorolj fel 3 magyarországi megyeszékhelyet. Hányféleképpen írhatók le a megyeszékhelyek betűi?
13. Hányféle rímképletet ismersz magyar irodalomból? Hányféleképpen írhatjuk fel a rímképleteket? Sorolj fel 1-1 verset is a rímképletekhez (ha eszedbe jut).
14. Hány olyan 3-jegyű szám van, amiben az 1-es szám csak egyszer szerepel?
15. Vizsgáld meg az alábbi vers rímképletét. Hányféle különböző rímképletet tudunk még felírni?

Itt van az ősz, itt van újra,

S szép, mint mindig, énnem.

Tudja isten, hogy mi okból

Szeretem? de szeretem.

(Petőfi Sándor: Itt van az ősz, itt van újra)

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Témazáró dolgozat

(11.osztály)

A feladatokat rendesen meg kell indokolni, csak végeredményt nem fogadok el. Szöveges választ ne felejtsetek el!

1. Hányféle sorrendben írhatók le a MAGYARORSZÁG szó betűi?
2. Hányféle hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számjegyekből?
3. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. A résztvevők csak egy tombolát vehetnek. A tombolatulajdonosok között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképp történhet ez?
4. Tízféle fagyalaltból választunk 4 gombócot egy tölcsérbe, úgy, hogy a gombócok egy oszlopot alkotnak; egy félebből többet is választhatunk. Hányféleképp alakulhat a tölcsér tartalma?
5. Háromféle gyümölcsből szeretnénk 1-1 kg-ot vásárolni a piacon, ahol a gyümölcsök közül almát, körtét, sárgadinnyét, szilvát és őszibarackot árulnak. Hányféleképp végződhet a vásárlás?
6. A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot osztunk. Hány darab legalább egy ászt tartalmazó különböző leosztás lehetséges?
7. András, Balázs, Csaba, Dénes, Endre és Ferenc egy koncerten egymás mellett foglalnak helyet. András és Ferenc úgy döntenek, hogy egymás mellé ülnek.
 - a. Hányféleképp ülhet le a társaság, ha András és Ferenc egymás mellett ülnek?
 - b. Hányféleképp ülhetnek le, ha András és Ferenc semmiképp sem akarnak egymás mellé ülni?
8. **Bónusz feladat:** Találj ki egy feladatot, melyben az ismétléses kombinációt kell alkalmazni, majd oldd is meg a feladatot!

Jó munkát!

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Javítási útmutató:

1. Feladat: összesen 7 pont

a. Annak felismerése, hogy Attilát és Ferencet 1 embernek kell számítani $\rightarrow 0,5p$

$5!=120 \rightarrow 0,5p$

Ferenc és Attila 2-féleképpen ülhet le: $2 \cdot 5!=240 \rightarrow 1p$

Szöveges válasz $\rightarrow 1p$

b. Összes lehetőség felírása: $6! \rightarrow 1p$

Esetek, amikor A és F egymás mellett ülnek: $5! \rightarrow 1p$ (ez a pont akkor is jár, ha az a. feladatrészen elszámolt számmal helyesen számol)

$6! - 5! = 600 \rightarrow 1p$

Szöveges válasz $\rightarrow 1p$

2. Feladat: összesen 5 pont

Összesen 12 betű \rightarrow lehetséges kirakások száma: $12! \rightarrow 2p$

Vannak egyforma betűk $\rightarrow \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \rightarrow 2p$

Szöveges válasz $\rightarrow 1p$

3. Feladat: összesen 4 pont

Összes hatjegyű szám: $6! \rightarrow 1p$

Vannak egyforma számok: $\frac{6!}{2! \cdot 3!} \rightarrow 1p$

$\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60 \rightarrow 1p$

Szöveges válasz $\rightarrow 1p$

4. Feladat: összesen 4 pont

10 nyerő tombola kiválasztása: $\binom{150}{10} \rightarrow 1p$

10 nyerő tombolát kell sorba állítani: $10! \rightarrow 1p$

$\binom{150}{10} \cdot 10! \rightarrow 1p$

Szöveges válasz $\rightarrow 1p$

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

5. Feladat: összesen 3 pont

Az első, második, harmadik és negyedik gombóc is 10-féle lehet → 1p

10^4 lehetőség → 1p

Szöveges válasz → 1p

6. Feladat: összesen 3 pont

5-féle gyümölcs, nekünk csak 3-féle kell → 1p

$\binom{5}{3} = 10$ → 1p

Szöveges válasz → 1p

7. Feladat: összesen 5 pont

Összes leosztás száma: $\binom{32}{4}$ → 1p

Legalább 1 ász azt jelenti, hogy az összes esetből le kell vonni, amikor egyetlen egy ász sem lesz kiosztva → kivesszük az ászokat és úgy

osztunk: $\binom{28}{4}$ → 2p

$\binom{32}{4} - \binom{28}{4}$ → 1p

Szöveges válasz → 1p

8. Feladat: összesen 8 pont

Feladat megfogalmazása → 3p

Megoldás felírása indoklással, szöveges válasszal → 5p

Dolgozat összpontszáma: 31 pont

Értékelés:

27 – 31 **5** (86%-tól)

22 – 26 **4** (70%-tól)

16 – 21 **3** (50%-tól)

9 – 15 **2** (30%-tól)

0 – 8 **1**

Készítette: Hegedűs Katalin, Pethes Kálmán

Kurzus: A matematika tanítása 4G-tg

Oktató: Wintsche Gergely Balázs

Matematikatörténet:

Erdős Pál (1913-1996) a 20. század egyik legkiemelkedőbb matematikusa volt. Apja és anyja matematikatanárok voltak. Erdős Pál már a középiskolában kitűnt tehetségével, mint a KöMaL feladatmegoldója. Tagja volt a matematika iránt érdeklődő budapesti középiskolásokat tömörítő Anonymus-csoportnak. A budapesti Szent István Gimnáziumban érettségizett, kiváló eredménnyel.

Elsősorban számelmélettel és **kombinatorikával**, halmazelmélettel, analízissel és valószínűségszámítással foglalkozott. Életében ő volt a **kombinatorika** kutatásának és alkalmazásának talán legnagyobb egyénisége. Zsenialitása nemcsak bizonyításaiban mutatkozott meg, hanem nagy problémafelvető is volt: művészi szintre fejlesztette a fontos problémák meglátásának képességét.

1983-ban megkapta a legmagasabb nemzetközi elismerést, a Nobel-díjjal egyenértékű Wolf-díjat. Magyarországon Kossuth-díjjal (1958) és Állami Díjjal (1983) – számelméleti, approximáció- és interpoláció-elméleti, **kombinatorikai**, halmazelméleti, valószínűségszámítási, geometriai és komplex függvénytanai kutatásaiért, iskolát teremtő tudományos és nevelő munkájáért – tüntették ki.

Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus, fizikus, vallásfilozófus és teológus. Hozzájárult a természettudományok fejlődéséhez, mechanikus számológépet szerkesztett, kidolgozta másokkal közösen a valószínűség matematikai elméletét. A nyomás mértékegysége az ő munkásságának tiszteletére lett pascal.

A **Pascal-háromszög** a binomiális együtthatók gyors és egyszerű kiszámolására használható. Kidolgozásakor alkalmazta először a teljes indukcióval történő bizonyítás módszerét. A **Pascal-háromszög** aritmetikai táblázatát használta a szerencsejátékok pont-problémájának megoldásához és a valószínűségszámítás fejlesztéséhez.