

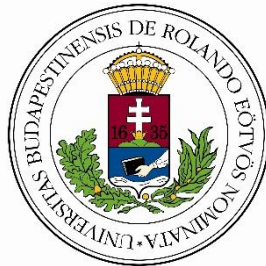
Kombinatorika és gráfelmélet
Tematikus terv
11. osztály, emelt óraszámú tanterv

Kurzus: Matematika tanítása 4.

Kód: mm5t2ms8g

Dátum: 2018. április 25.

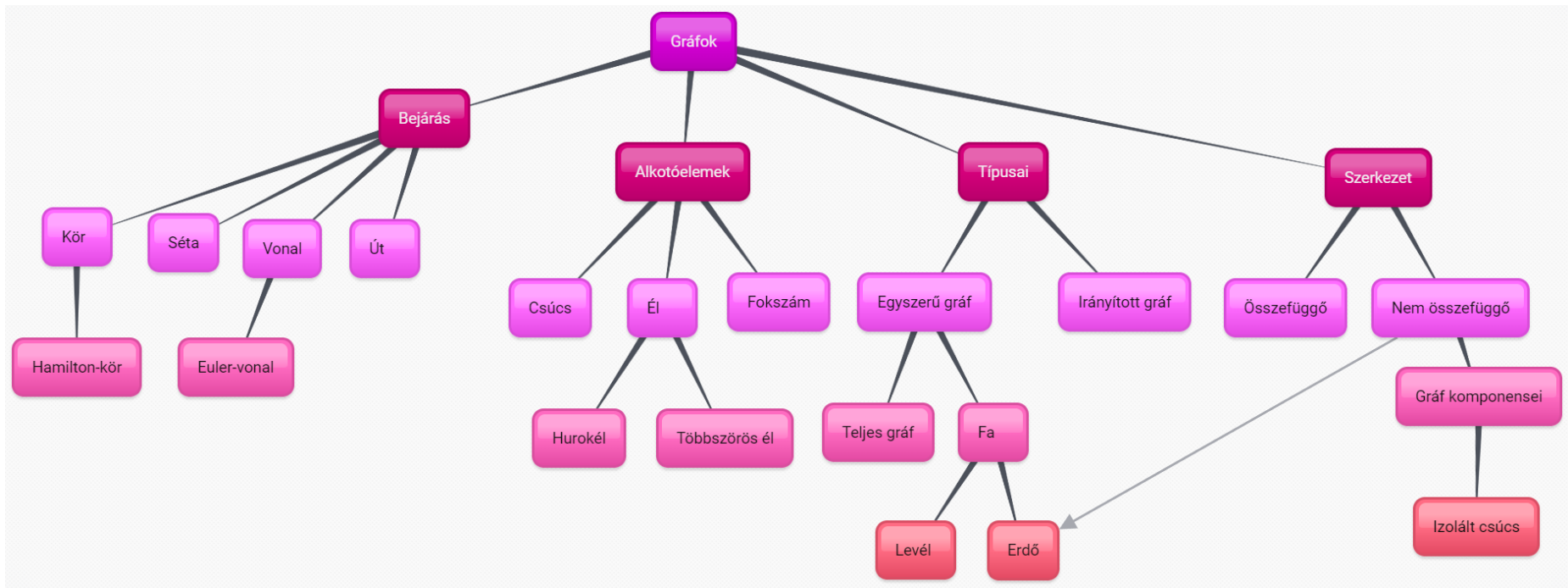
Készítette: Turcsik Bíborka és Albert Roland



Óraszám	Az óra témája	Célok, fejlesztési területek	Fogalmak/ismeretek
1.	A kombinatorika bevezetése	korábbi ismeretek felidézése; permutáció alkalmazása feladatokban	permutáció, faktoriális
2.	Variáció	kiválasztási feladatok bevezetése; a sorrend szempontja a kiválasztásnál	mintavétel, ismétlés nélküli variáció, ismétléses variáció
3.	Kombináció	kombináció mint sorrendtől független kiválasztás; a kombináció megkülönböztetése a variációtól; matematikatörténet: Pascal-háromszög	ismétlés nélküli kombináció, ismétléses kombináció, $\binom{n}{k}$, Pascal-háromszög
4.	Vegyes kombinatorikai feladatok	permutáció, variáció, kombináció felismerése feladatokban; helyes alkalmazásuk	leszámlálás, permutáció, kombináció, variáció
5.	Binomiális tétel	binomiális tétel megértése, alkalmazása; Pascal-háromszög n-edik sorának összege, többféle bizonyítási módszer adása; dolgok különböző szempontú megközelítése	binomiális együttható, binomiális tétel, Pascal-háromszög, halmaz összes részhalmazainak száma
6.	Gyakorlás	Kombinatorikus feladatok rendszerező gyakorlása	-
7.	Gráfok	gráfokkal kapcsolatos alapfogalmak átismétlése	egyszerű gráf, pont/csúcs, él, fokszám, hurokél, többszörös él
8.	Gráfok gyakorlati alkalmazásai	gráfok szerepe a mindennapokban; matematikatörténeti érdekességek: gráfok elmélete, Euler	irányított gráf, gráfok színezése
9.	További gráfelméleti fogalmak megismerése I.	egyszerű definíciók és tételek kimondása; szemléltető ábra készítése; gráfok alkalmazása különböző problémák megoldásaiban	séta, út, vonal, Euler-vonal, kör
10.	További gráfelméleti fogalmak megismerése II.	egyszerű definíciók és tételek kimondása; szemléltető ábra készítése, modellalkotás,	Hamilton-kör

		gráfok alkalmazása további problémák megoldásaiban	
11.	A fagráfok	fagráfok alkalmazása a matematika különböző területein mint szemléltetőeszköz	fa, levél, erdő, izolált pont, összefüggő gráf, komplementer gráf, izomorf gráf
12.	Gráfok és leszámolás	a kombinatorika és a gráfok összekapcsolása feladatokon keresztül	-
13.	Gyakorlás	vegyes gráfelméleti feladatok gyakorlása	-
14.	Összefoglalás	eddig tanultak összefoglalása, rendszerezése kombinatorika és gráfelmélet témakörökben	-
15.	Témazáró dolgozat	számonkérés, értékelés	-

Fogalmi háló:



8. óra óraterv

Tantárgy: matematika

Évfolyam: 11. osztály

Téma: Gráfelméleti alkalmazások és matematikatörténet

Előzetes ismeretek: Gráfelméleti alapfogalmak ismerete; egyszerű gráfok felismerése, ábrázolása

Az óra célja: Megismerkedés a gráfok néhány gyakorlati alkalmazásával; gráfok szerepének felismerése a mindennapi életben; matematikatörténeti kedvcsinálás

Felhasznált tankönyvek:

KOSZTOLÁNYI József et al.: *Sokszínű matematika 11.* Mozaik, Szeged, 2015.

Dr. VANCÓSÓ Ödön: *Matematika 11. osztályosok számára.* Műszaki Kiadó, Budapest, 2004.

dr. GERŐCS László—SZÁMADÓ László: *Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára.* OFI, 2015.

Idő	Az óra menete	Tanulói tevékenység	Munkaforma	Módszer	Eszközök	Megjegyzés
0-2'	Elmondjuk a diákoknak, hogy ma tovább foglalkozunk a gráfokkal. Kiosztunk mindenkinek 1-1 kinyomtatott rajzot a Königsbergi hidakról.	Felkészülnek az órára.	Frontális	Tanári magyarázat	Nyomtatott ábrák	-
3-6'	A diákok próbáljanak meg olyan útvonalat berajzolni, hogy minden hídon pontosan egyszer mennek át, és a végén ugyanazon az oldalon jutnak ki, ahonnan indulnak.	Próbálnak megfelelő utat berajzolni.	Egyéni munka	-	Nyomtatott ábrák	Bármelyik oldalon és bármelyik hídon elindulhatnak. Összedolgozhatnak a partársukkal.
7-8'	Megkérdézzük, kinek sikerült megfelelő utat rajzolnia.	Reflektálnak a feladatra, ötletelnek.	Frontális	Kérdve kifejtő	-	-

	Szerintük létezik-e ilyen útvonal, és miért?					
9-15'	Elmeséljük Euler esetét a königsbergi hidakkal, és átalakítjuk a feladatot gráfelméleti problémává.	Figyelnek, jegyzetelnek.	Frontális	Tanári előadás	PPT	-
16-18'	Felhívjuk rá a figyelmet, hogy a gráfok különböző kapcsolatok áttekinthető szemléltetésére alkalmasak. Megkérdezzük őket, szerintük miket lehet/célszerű gráfokkal szemléltetni.	Ötleteket mondanak.	Frontális	Brainstorming	Tábla, kréta	Az ötletek felkerülnek a táblára fürtábrába. Jelezzük, hogy ez is egy gráf! Ha nem hangzik el, mindenképp írjuk fel a Facebookot , ami kapcsolatrendszereknek egy hatalmas gráfja.
19-28'	Definiáljuk az irányított gráf fogalmát. Megoldjuk a következő feladatot: lásd ppt!	Figyelnek, jegyzetelnek.	Frontális	Tanári magyarázat	PPT	Magyarázat közben vonjuk be a diákokat is, hogy nézték-e a meccseket, szeretik-e a vízilabdát, tudják-e az eredményeket, stb.
29-33'	Beszélünk a gráfok színezésének kérdéséről, és a négyszíntétel problémájáról.	Figyelnek.	Frontális	Tanári előadás	PPT	Házi feladat kisötösért: Nézz utána, mikor és hogyan sikerült bebizonyítani a négyszíntételt!
34-42'	Mindenki a padtársával játssza le a következő játékot: Adott három pont a síkon. Az első játékos összeköt két tetszőleges pontot, és kijelöl a vonalon egy újabb pontot. Ezután felváltva	Kipróbálják a játékot.	Páros munka	Játék	Papír, ceruza	Többször is játsszák végig a játékot, és próbáljanak közben nyerő stratégiát kialakítani!

	ismétlik a játékosok ugyanezt úgy, hogy semelyik két vonal nem metszheti egymást. Amikor egy pontból már három él indul, akkor bekarikázzuk, és kizárjuk a játékból. Az veszít, aki nem tud több pontot összekötni.					Próbálják ki több, mint 3 kezdeti ponttal is!
43-45'	Előző feladat összegzése, megbeszélése. Biztosan véget ér-e a játék? Miért? Mennyi volt a legtöbb és a legkevesebb lépés, amennyivel sikerült a játék végére érni?	Figyelnek, elmondják az észrevételeiket.	Frontális	Megbeszélés	PPT	Nem baj, ha nem jut idő a megbeszélésre, a diákok megkapják az órához tartozó prezentációt.

9. óra óraterv

Tantárgy: matematika

Évfolyam: 11. osztály

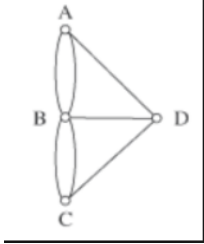
Téma: További gráfelméleti fogalmak megismerése I.

Előzetes ismeretek: Gráfelméleti alapfogalmak ismerete, egyszerű gráfok felismerése, ábrázolása, néhány matematikatörténeti és alkalmazásbeli vonatkozás ismerete.

Az óra célja: A séta, út, vonal, kör, Euler-vonal fogalmának bevezetése, az Euler-vonalhoz kapcsolódó tétel kimondása, mindezeknek néhány feladatbeli alkalmazása.

Felhasznált tankönyvek:

KOSZTOLÁNYI József et al.: *Sokszínű matematika 11.* Mozaik, Szeged, 2015.

Idő	Az óra menete	Tanulói tevékenység	Munkaforma	Módszer	Eszközök, táblakép	Megjegyzés
0–2'	Üdvözlés. Az előző órai anyag felelevenítése. Kérdés: Emlékeztek-e a Königsbergi hidak problémájára? Miről szól, mit mondott Euler? A válaszok után elmondjuk, hogy ennek a problémának a kapcsán a mai órán meg fogunk ismerkedni a fontosabb gráfelméleti fogalmakkal, definíciókkal és tételekkel, majd tovább boncolgatjuk a hidak kérdését.	Jelentkeznek, válaszolnak.	Frontális	Kérdve kifejtés, tanári magyarázat.	A táblán a Königsbergi hidak rajza.	-
3–6'	Tekintsük továbbra is a Königsbergi hidak ábráját. Kérdés: Milyen módokon juthatunk el A-ból C-be? (Elképzelve, hogy akár összevissza sétálgatunk és bolyongunk a városban és a hidakon.)	A füzetükbe rajzolgatnak, összedolgoznak a pártársukkal.	Egyéni, páros munka.	Feladatmegoldás	Táblán rajz: 	A tanár körbejár, nézi a rajzokat, utasításokat ad, hogy rajzoljanak még hosszabb vagy rövidebb „útvonalakat”.
7–10'	Egy-egy diák kihívása a táblához, általuk egy-egy „útvonal” felrajzolása úgy, hogy a végén mindenképpen legyen a táblán séta, út, vonal is.	Néhányan kijönnek a táblához.	Frontális	Szemléltetés	A táblán rajzok.	A sikeres és gyors megvalósításhoz a tanár kérheti a kihívott diákokat, hogy egyikük a szerinte lehető legkevesebb hídon átmenő, másikuk a szerinte lehető legtöbb hídon átmenő stb.

						„útvonalat” rajzolja fel. Ha kell, a végén a tanár is rajzol a táblára, kiegészít, hogy mindenképpen legyen séta, út, vonal is a rajzok között.
11–14’	Séta, út, vonal definíciója* a táblai rajzok felhasználásával. A definíciók a táblára és a füzetükbe is fel-/bekerülnek.	Figyelnek, a füzetükbe írnak.	Frontális	Tanári magyarázat	Táblán rajz, definíció.	-
15–17’	Még egy kérdés: A-ból A-ba hogyan lehet eljutni? Néhány diák kihívása a táblához, hogy rajzoljanak fel ilyeneket a táblára. Ezek alapján a kör definíciójának* a kimondása, felírása.	Figyelnek, ötletelnek, néhányan kijönnek a táblához és rajzolnak.	Frontális	Szemléltetés, tanári magyarázat	Táblán rajz, definíció.	-
18–20’	Elmondjuk nekik, hogy miután definiáltunk ennyi mindent, vissza is térhetünk a Königsbergi hidak problémájához, hogy jobban megértsük azt. Fogalmazzuk át a problémát az előbb megismert definíciók segítségével!	Figyelnek, ötletelnek.	Frontális	Tanári magyarázat, kérdve kifejtés.	A táblán továbbra is a Königsbergi rajza.	Fontos, hogy az ötletelés során kimondásra kerüljön, hogy a Königsbergi hidak problémájában valójában vonalat kerestünk.
21–23’	Mit is mondott Euler, miért nem sikerülhet? A választ tartjuk az eszünkben! 😊	Válaszolnak.	Frontális	Kérdve kifejtés	-	Fontos, hogy felidézzék és kimondják, hogy Euler a fokszámok páratlanságára hivatkozott.
24–27’	Még egy kérdés: hány híd kellene ahhoz, hogy megoldható legyen a feladat?	A füzetükben dolgoznak,	Egyéni, páros munka.	Feladatmegoldás	-	-

	Vagyis hány élt kell még behúznunk, hogy találjunk megfelelő vonalat?	akár együtt a partársukkal.				
28–30'	Két diák kihívása a táblához, általuk két különböző megoldás felrajzolása. Kérdés: mit veszünk észre? (Gondoljunk arra, mit mondott Euler. Mi változott?)	Ketten a táblánál.	Frontális	Szemléltetés	Táblán rajzok.	Fontos, hogy kimondják, hogy az újonnan kapott gráf fokszámai párosak. Szóval, Euler tudott valamit! 😊
31–33'	Az előző ábrákon szemléltetve az Euler-vonal (nyílt és zárt) definíciójának* bevezetése.	Figyelnek.	Frontális	Tanári magyarázat	Táblán a definíció.	Annak megértése, hogy két él berajzolásával találtunk a gráfban zárt Euler-vonalat.
34–36'	Általánosabban megvizsgálva az Euler-vonal lehetőségét – kérdés: Mi szükséges ahhoz, hogy egy gráfban legyen nyílt vagy zárt Euler-vonal, azaz bejárható legyen olyan módon, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át? → A tétel** kimondása.	Válaszokkal hozzájárulnak a tétel kimondásához.	Frontális	Tanári magyarázat	Táblán tétel.	
37–40'	Egy alternatív feladat: házikórajzolás. Kérdés: Le tudod úgy rajzolni, hogy nem emeled fel a ceruzád? Miért?	A füzetükben dolgoznak, aztán néhányan felrajzolják a megoldásukat a táblára.	Egyéni munka	Szemléltetés	Előzetesen a melléklet kiosztása.	Annak tudatosítása, hogy itt valójában nyílt Euler-vonalat keresünk egy gráfban.

41– 45'	Az eddigiek összegzése, házi feladat feladása: Két Euler-vonalas feladat.	Figyelnek.	Frontális	Összegzés	A melléklet utóbbi két feladata.	Ha van még időnk, valamelyik feladatot el is kezdhethetjük megcsinálni.
------------	---	------------	-----------	-----------	----------------------------------	---

***Definíciók:**

Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pontok többször is előfordulhatnak.

Vonalnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él legfeljebb egyszer fordulhat elő, de lehetnek olyan pontok, amelyek többször is előfordulnak.

Útnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

Körnek nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben a kiindulási pont megegyezik a végponttal, egyébként minden él és minden más pont legfeljebb egyszer fordul elő.

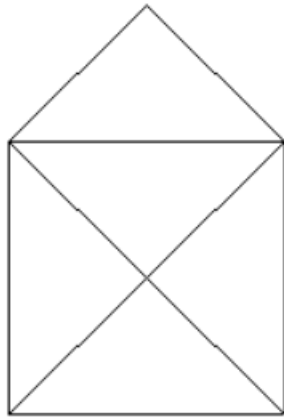
Euler-vonalnak nevezünk a gráfban egy vonalat, ha az a gráf minden élén áthalad. Ha e vonal kezdőpontja megegyezik a végpontjával, akkor zárt Euler-vonal, ha a vonal kezdőpontja különbözik a végpontjától, akkor nyílt Euler-vonal.

****Tétel:**

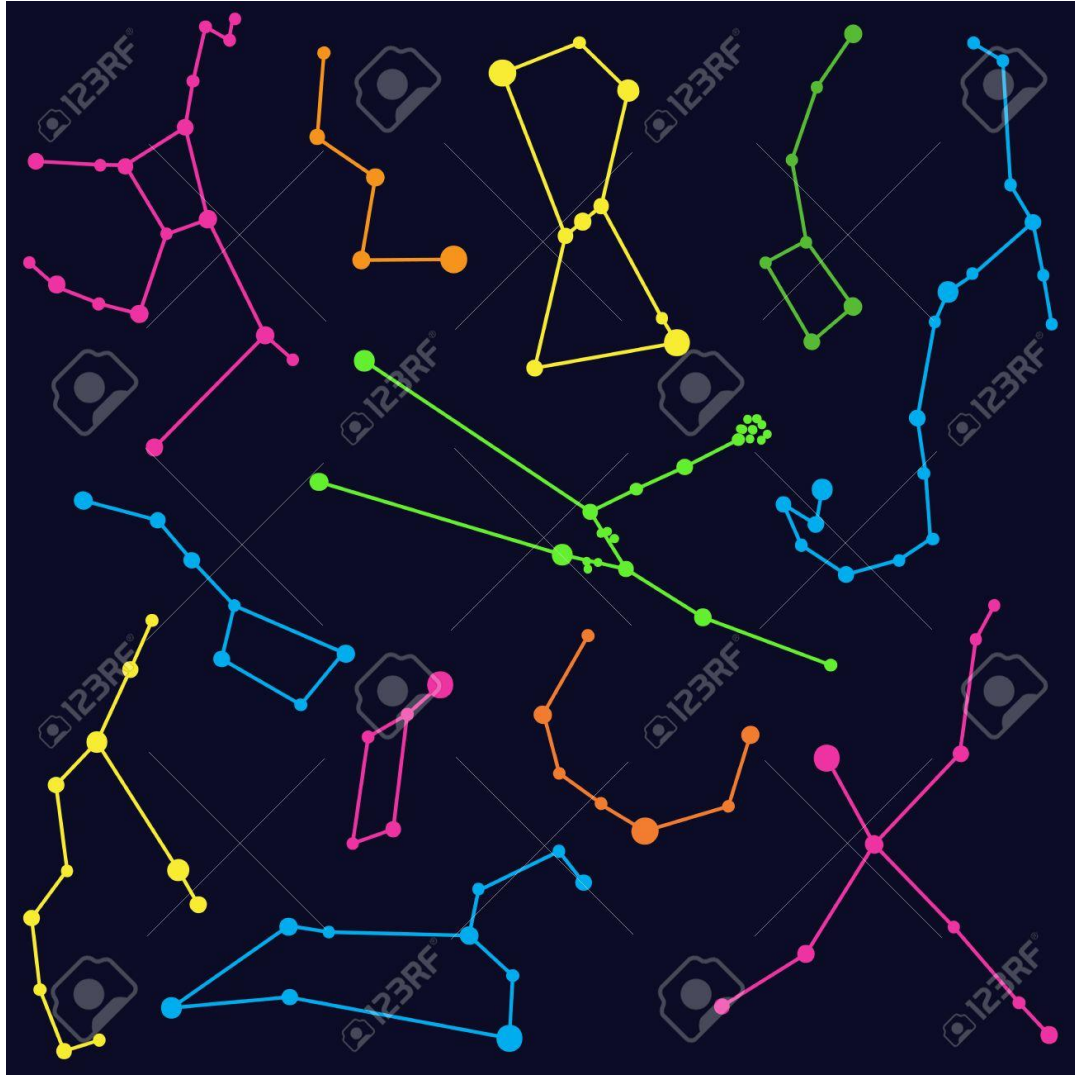
Egy gráfban zárt Euler-vonal létezésének szükséges feltétele, hogy minden pont fokszáma páros legyen. Egy gráfban nyílt Euler-vonal létezésének szükséges feltétele, hogy két pont fokszáma páratlan, a többi páros legyen.

Melléklet:

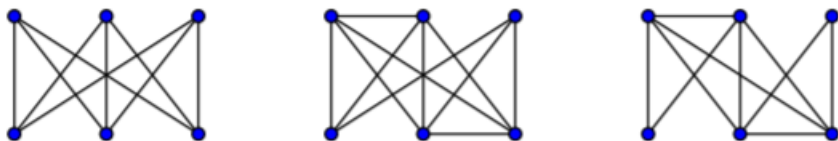
Le tudod úgy rajzolni, hogy nem emeled fel a ceruzád? Miért?



Keress kört, illetve Euler-vonalat a csillagképekben! Mennyit és milyeneket találtál?



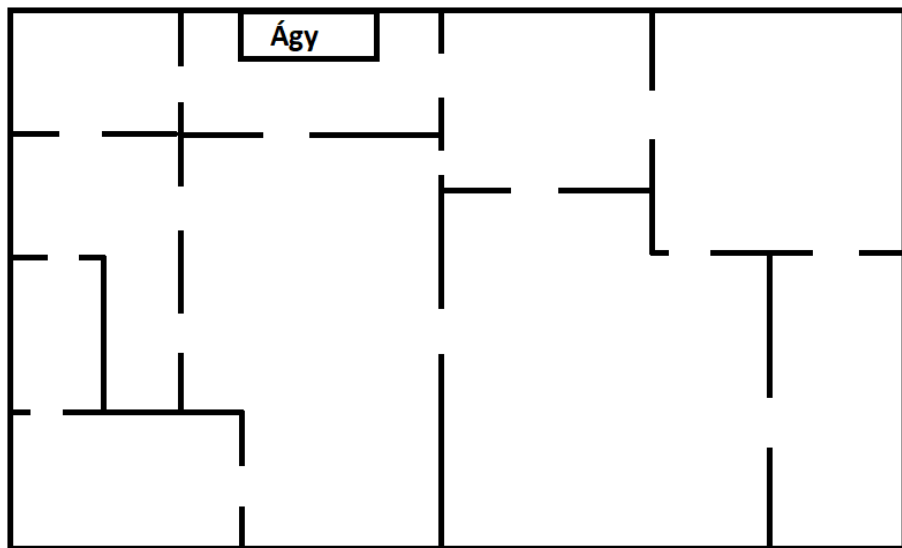
Melyik gráfban van nyílt/zárt Euler-vonal? Miért?



.....

Témazáró dolgozat (45 perc):

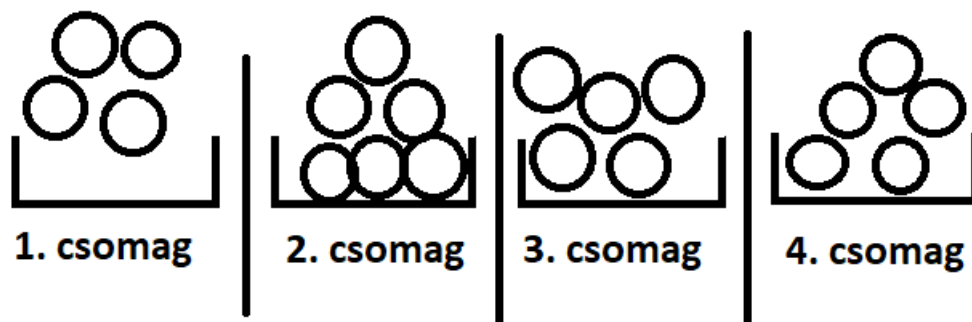
1. Babi néni éppen a mikulászsomagokat készíti az unokái számára. Egyenlő arányban szeretne volna szétosztani a 20 db egyforma szaloncukrot, de sietnie kellett, ezért csak véletlenszerűen beleszórta minden csomagba valamennyit. Hányféleképp oszthatta el a szaloncukrokat, ha az összes belekerült valamelyik csomagba, és Babi néninek négy unokája van? (4 pont)
2. Mennyi a Pascal-háromszög n -edik sorának váltakozó előjelű összege $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + \binom{n}{n}$? Válaszodat indokold! (3 pont)
3. Egy labdarúgó tornán 5 csapat vesz részt. A bajnokság akkor ér véget, amikor minden csapat játszott egy mérkőzést minden csapattal. A bajnokság egyik szünetében az öt csapat rendre 4, 3, 3, 2 és 1 meccset játszott le. Lehetséges-e ilyen állás, miért? (2 pont)
4. Egy 9 elemű H halmaznak kiválasztjuk 7 darab 4 elemű részhalmazát. Igaz-e, hogy van olyan H -beli elem, amelyik legalább négy részhalmaznak is eleme? Válaszodat indokold! (5 pont)
5. Mátyás király minden nap a hálóterméből indulva úgy jut el a trónterembe, hogy a vár összes helyiségén átmenjen, minden ajtón pontosan egyszer. Az ábrán a vár alaprajza látható. Melyik szoba lehet a trónterem, és miért? Rajzolj be egy lehetséges útvonalat! (4 pont)



Témazáró feladatainak megoldásai:

1. A feladat ismétléses kombinációval számolható. (1 pont)

Megfelelő ábra készítése (1 pont)



A számítás menete (1 pont)

$$\binom{20 + 4 - 1}{20} = \binom{23}{20}$$

(Ha nem készít ábrát, de jó a felírás, akkor is jár a 2 pont)

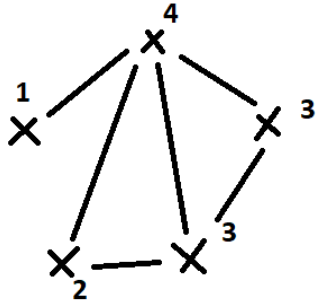
Helyes végeredmény, válasz: 1771 (1 pont)

2. A feladat megoldásához a binomiális tétel alkalmazható (1 pont)

A helyes felírás $a=1$, $b=-1$ szereposztással: $(1-1)^n=0^n=0$ (1 pont)

Helyes válasz megadása: 0 (1 pont)

3. A feladat átfogalmazása a gráfok segítségével (ábra vagy szöveges indoklás) (1 pont)



A gráf fokszámösszegére vonatkozó tétel alkalmazása: $4+3+3+2+1=13 \rightarrow$ nem páros, tehát nincs ilyen gráf. (1 pont)

4. A feladat ábrázolása gráffal (A feladat gráfok nyelvére átfogalmazva 1 pont): Felveszünk egy oszlopba 9 pontot, ezek lesznek H elemei, majd mellé egy másik oszlopba további 7 pontot, ezek a kiválasztott négyelemű részhalmazok. Élek csak a két oszlop pontjai között haladnak úgy, hogy a második oszlop minden eleméből négy él fut ki, és azokkal az első oszlopbeli elemekkel köti össze őket, amelyek benne vannak az adott részhalmazban. Így a gráfban húzott összes él száma $7 \cdot 4 = 28$. Az első oszlop pontjaiból tehát 28 él fut ki, de ahhoz, hogy mindegyik pontból legfeljebb 3 él legyen húzható, maximálisan $3 \cdot 9 = 27$ db él lehet (1 pont). Így a skatulyaelv szerint mindenképp lesz egy olyan él, aminek a foka 4, azaz van olyan elem, amely legalább négy kiválasztott részhalmaznak is eleme (2 pont). (A jó válasz megadása megfelelő indoklás nélkül 1 pont)

Ábra:

H elemei 4-elemű részhalmazok



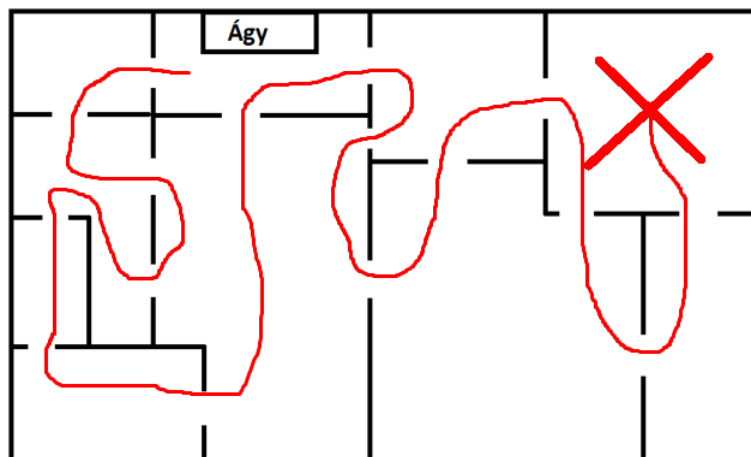
(Bármilyen használható ábra készítése esetén 1 pont)

5. A trónterem beazonosítása. (1 pont)

A trónterembe vezető ajtók száma páratlan kell, hogy legyen. (1 pont)

Ennek indoklása: A trónterem bejárása egy nyitott Euler-vonal, ennek feltétele, hogy a kezdő és a végpont fokszáma páratlan, az összes többi páros. (1 pont)

Helyesen berajzolt útvonal. (1 pont)



Értékelés:

$$18-15=5$$

$$14-12=4$$

$$11-9=3$$

$$8-6=2$$

$$5-0=1$$