Elemi4 ZH, AAA csoport 2018.04.04.

vizsgázó neve:...............................

vizsgázó Neptun (Ψ) kódja:................

Kapott pontszámok

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Minden feladat 10 pont.

1. Egy icipici hangya elindul az origóból és 1 egységnyi utat tesz meg az x-tengely mentén pozitív irányba. Aztán balra fordul és az előző távolság felét teszi meg, aztán balra fordul és az előző távolság felét teszi meg, stb. Hová ér, ha végtelen sokat lép?

   Megoldás:

   Ez azt jelenti, hogy összegeznünk kell az $1+\frac{i}{2}+\ldots+\left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-i/2} = \frac{1+i/2}{5/4} = 4/5+2/5i$

2. II. Pomádé király halálosan gyűlölte elődjét I. Pomádét, ezért országában betiltotta az 1 számjegy használatát. Attól kezdve a következőképpen számoltak: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, 23, ... Mi volt ebben a számsorban a 2018. helyen álló szám? Megoldás

   Írjuk át 9-es számrendszerbe a 2018-at. A 9 hatványok 1, 9, 81, 729, ...tehát a szám 2682_9 Mivel 1-es számjegy nincs, ezért eggyel eltolódnak a számjegyek, 3793.

3. A nyugdíjas évekre készülve István az 45. születésnapján egy megtakarítási számlát nyit, amelyen 64. születésnapjáig minden alkalommal 400000 Ft-ot helyez el. (A kamat fordulónapja is a szülinapján van, és tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ez a nap január 1.). A teljes időszakban legyen a kamat évi 5%.

   a) Ha 65 éves korában egy összegben kívánja felvenni, akkor mennyi lesz a felhalmozott összeg?

   b) Ha az állam az évi befizetések 20%-át minden év zárása után jóváírja a számlán, akkor mekkora lesz a 65. születésnapra felhalmozott összeg?

   c) Ha a teljes összeget évi egyenlő járadék részletekben venné fel, a 65. és a 75. szülinapja között úgy, hogy az utolsó összeg a 75. születésnapján esedékes, akkor mennyi lenne az éves járadékösszeg?

   Megoldás

   a) $400000\cdot 1,05^{20}+\ldots+400000\cdot 1,05 = 400000\cdot 1,05\,(1+\ldots 1,05^{19}) = 400000\cdot 1,05\frac{1,05^{20}-1}{1,05-1} \approx$ 13887701 Legyen ez Ta.

   b) $13887701+80000\cdot\frac{1,05^{20}-1}{0,05} = 13887701+2645276 = 16532977$. Legyen ez Tb.

   c) Legyen a járadék Ja. $Ta\cdot 1,05^{10} = Ja\cdot\frac{1,05^{11}-1}{0,05} \Rightarrow Ja = 1592310$

   Legyen a járadék Jb. $Tb\cdot 1,05^{10} = Jb\cdot\frac{1,05^{11}-1}{0,05} \Rightarrow Jb = 1895607$

4. Lásd be, hogy bármely a, b, $c>0$ szám esetén

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

   Megoldás Tudjuk, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

   köbre emelve és átszorozva 8-cal.

$$8 \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \geq (a+b)^3$$

Ezt mindhárom számpárra felírva és összeadva kapjuk, hogy

$$8(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$$

Írjuk fel erre a három számra a hatványközepes és a mértani egyenlőtlenséget.

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{3}} \geq \sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Köbre emelve és 3-mal szorozva épp az egyenlőtlenségből hiányzó láncszemet kapjuk.

5. Egy sorozat tagjairól tudjuk, hogy: $a_1 = 3$; $a_2 = 6$; $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$. Lásd be, hogy $a_n = 2^n + n$.

6. Legyen a, b és c három olyan pozitív szám, amelyre $a+b+c=1$. Lásd be, hogy

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

Megoldás

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2}{3}} \geq \frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3}$$

Mert

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{3}$$

azaz

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$$

Most az első egyenlőtlenséget négyzetre emelve és 3-mal szorozva készen vagyunk.

Elemi4 ZH, BBB csoport 2018.04.04.

vizsgázó neve:...............................

vizsgázó Neptun (Ψ) kódja:................

Kapott pontszámok

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Minden feladat 10 pont.

1. A nyugdíjas évekre készülve Jolán a 45. születésnapján egy megtakarítási számlát nyit, amelyen 64. születésnapjáig minden alkalommal 400000 Ft-ot helyez el. (A kamat fordulónapja is a szülinapján van, és tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ez a nap január 1.). A teljes időszakban legyen a kamat évi 4%.

   a) Ha 65 éves korában egy összegben kívánja felvenni, akkor mennyi lesz a felhalmozott összeg?

   b) Ha az állam az évi befizetések 10%-át minden év zárása után jóváírja a számlán, akkor mekkora lesz a 65. születésnapra felhalmozott összeg?

   c) Ha a teljes összeget évi egyenlő járadék részletekben venné fel, a 65. és a 80. szülinapja között úgy, hogy az utolsó összeg a 80. születésnapján esedékes, akkor mennyi lenne az éves járadékösszeg?

   Megoldás

   a) $400000 \cdot 1,04^{20} + \ldots + 400000 \cdot 1,04 = 400000 \cdot 1,04\,(1 + \ldots 1,04^{19}) = 400000 \cdot 1,04 \frac{1,04^{20}-1}{1,04-1} \approx$ 12387681 Legyen ez Ta.

   b) $12387681 + 40000 \cdot \frac{1,04^{20}-1}{0,04} = 12387681 + 1191123 = 13578804$. Legyen ez Tb.

   c) Legyen a járadék Ja. $Ta \cdot 1,04^{15} = Ja \cdot \frac{1,04^{16}-1}{0,04} \Rightarrow Ja = 1022222$

   Legyen a járadék Jb. $Tb \cdot 1,04^{15} = Jb \cdot \frac{1,04^{16}-1}{0,04} \Rightarrow Jb = 1121255$

2. Egy icipici hangya elindul az origóból és 2 egységnyi utat tesz meg az x-tengely mentén pozitív irányba. Aztán jobbra fordul és az előző távolság felét teszi meg, aztán jobbra fordul és az előző távolság felét teszi meg, stb. Hová ér, ha végtelen sokat lép?

   Megoldás

   A $(8/5; -4/5)$

3. IV. Leinin király halálosan gyűlölte elődjét III. Leinint, ezért országában betiltotta a 3 számjegy használatát. Attól kezdve a következőképpen számoltak: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, ... Mi volt ebben a számsorban a 2018. helyen álló szám?

   Megoldás:

   2792, lásd az indoklást az A feladatsornál.

4. Lásd be, hogy bármely a, b, $c > 0$ szám esetén

$$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 16abc$$

5. Egy sorozat tagjairól tudjuk, hogy: $a_1 = 3$; $a_2 = 6$; $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$. Lásd be, hogy $a_n = 2^n + n$.

6. Legyen a, b és c három olyan pozitív szám, amelyre $a + b = 1$. Lásd be, hogy

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$