EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK – TERVEZET

9. osztály

Matematika tanítása 4

Gutai Gábor, Werner Bence Tamás

15 órás terv			
	Ismeretek	***Fejlesztendő készségek***	***Kapcsolódó pontok***
1.óra	Geometriai alapfogalmak ismétlése: térelemek, alakzatok, távolságok. Definíció átismétlése: geometriai transzformációk	Absztrakció: függvény, pont, egyenes, sík, síkidomok, testek. Vázlatkészítés, modellezés.	
2. óra	Egybevágósági transzformációk rendszerező áttekintése: tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés	A megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása.	Fizika: elmozdulás vektor, inerciarendszer Földrajz: bolygók mozgása
3. óra	Egybevágósági transzformációk rendszerező áttekintése: eltolás, forgatás.		
4. óra	Egybevágósági transzformációk rendszerező áttekintése: forgatás. Folytatás.		
5. óra	Geometriai transzformációk tulajdonságai: fix pont, fix egyenes, fix sík.		
6. óra	Feladatmegoldás az előző témákban.	Alkalmazás, elmélyítés	
7. óra	Szimmetrikus alakzatok.	A szimmetria fogalmának megértése és felfedezése a természetben, művészetben.	Művészet: szimmetria jelentősége, stílusok Biológia: szimmetria a természetben, az emberi test.
8. óra	Egybevágóságok kompozíciója.	A matematika területei közötti kapcsolatok megértése.	Analízis: transzformációk, függvények kapcsolata
9. óra	Egyszerű szerkesztési feladatok.	Precizitás, pontos munka. Rávilágítás a téma alkalmazásaira.	Informatika: geogebra
10. óra	Egybevágóság keresése.	Inverz gondolkodás, algoritmikus eljárások.	
11. óra	Egybevágóság fogalma, alakzatok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.	Térérzékelés, hasonlóságok felismerése.	
12. óra	Egyszerű szerkesztési feladatok.	Precizitás, pontos munka. Rávilágítás a téma alkalmazásaira.	Informatika: geogebra
13. óra	Ismétlés, gyakorlás.		
14. óra	Összefoglalás az egész témakörben.		
15. óra	Dolgozat írása.		

2. órai óravázlat

Témakör	*Az óra anyaga*	*Szemléltető eszközök*
Egybevágósági transzformációk	Az egybevágósági transzformációk rendszerezése	Tábla, festék és kartonpapír
Előismeretek	***Az óra típusa***	***Munkamenet***
Geometriai transzformációk fogalma, térelemek ismerete	Új anyagot feldolgozó	Frontális tanítás, csoportos és egyéni munka

Fejlesztendő területek:

Oktatás: az egybevágósági transzformációk alapfogalmainak megértése, rendszerezése. A transzformáció során megmaradó és változó tulajdonságok felismerése. Bizonyítások menetének gyakorlása.

Nevelés: a csoportos munka során a diákok lehetőséget kapnak a közös munkára. Lehetőség szerint olyan csoportokban, ahol a tagok keveset dolgoznak együtt, hogy a szociális hálót és ismerkedést könnyítse az osztályban. (9. osztály lehet első évfolyam középiskolában, így különösen fontos, hogy ne kerüljenek egyes diákok peremhelyzetbe)

Felhasznált irodalom: Sokszínű Matematika 9., Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.

Az óra áttekintése:

Ismétlés (5 perc):

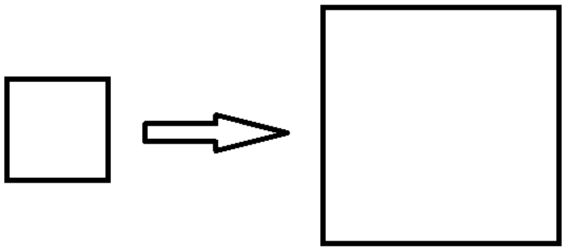
Definíció: a geometriai transzformáció olyan függvények (egyértelmű hozzárendelések), amelyek ponthoz pontot rendelnek hozzá, azaz értelmezési tartományuk és értékkészletük is ponthalmaz.

- P pont képe P'.
- Alakzat képe.

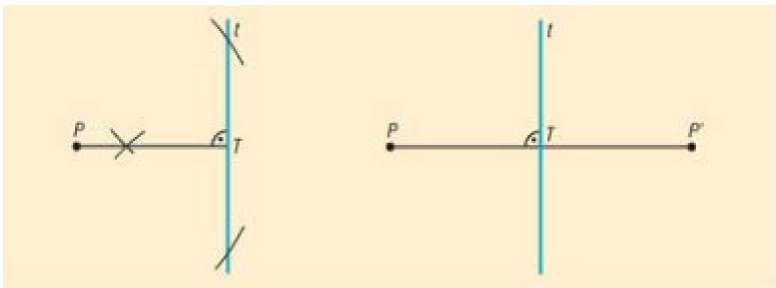
<u>Frontális tanítás, új definíciók tanulása (10 perc)</u>

Definíció: Egybevágósági (távolságtartó) transzformációk azok a geometriai transzformációk, amelyeknél bármely szakasz képe az eredetivel egyenlő hosszúságú szakasz.

- **Megértés ellenőrzése:** egybevágósági transzformáció-e? Miért? (táblarajz formájában)



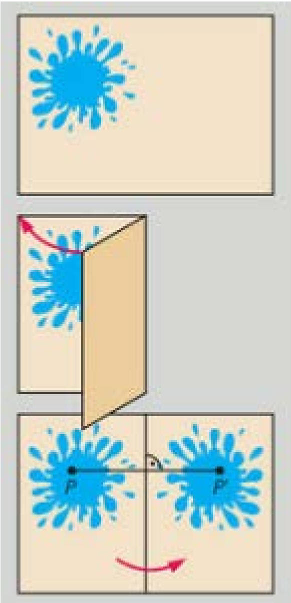
- **Definíció**: Adott a sík egy t egyenese. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P’ pontot a következőképpen:
  - ha P ∈ t, akkor P = P’
  - ha P nem ∈ t, akkor P’ a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP’ szakasz felező merőlegese a t egyenes.
- A t a tengelyes tükrözés tengelye.
- P’ szerkesztése:



Feladatmegoldás (15 perc)

<u>1. Feladatmegoldás – csoportos munka, 3-4 fő</u> <u>(5 perc)</u>

- Az előkészített kartonpapír és festék szükséges a feladathoz.
- A kartonpapírt félbe kell hajtani, majd az egyik felére (csak az egyikre) kell egy festékpacát készíteni.
- Ezután újra félbe kell hajtani a papírt, néhány másodpercig így tartani, majd kinyitni.
- Közös megbeszélés:
- A papír másik oldalán egy tengelyesen tükrözött pacát kapunk, ennek a tengelye a félbehajtás egyenese.
- Az eredeti festékfolt pontjai a P pontok, az újak a P’ pontok.



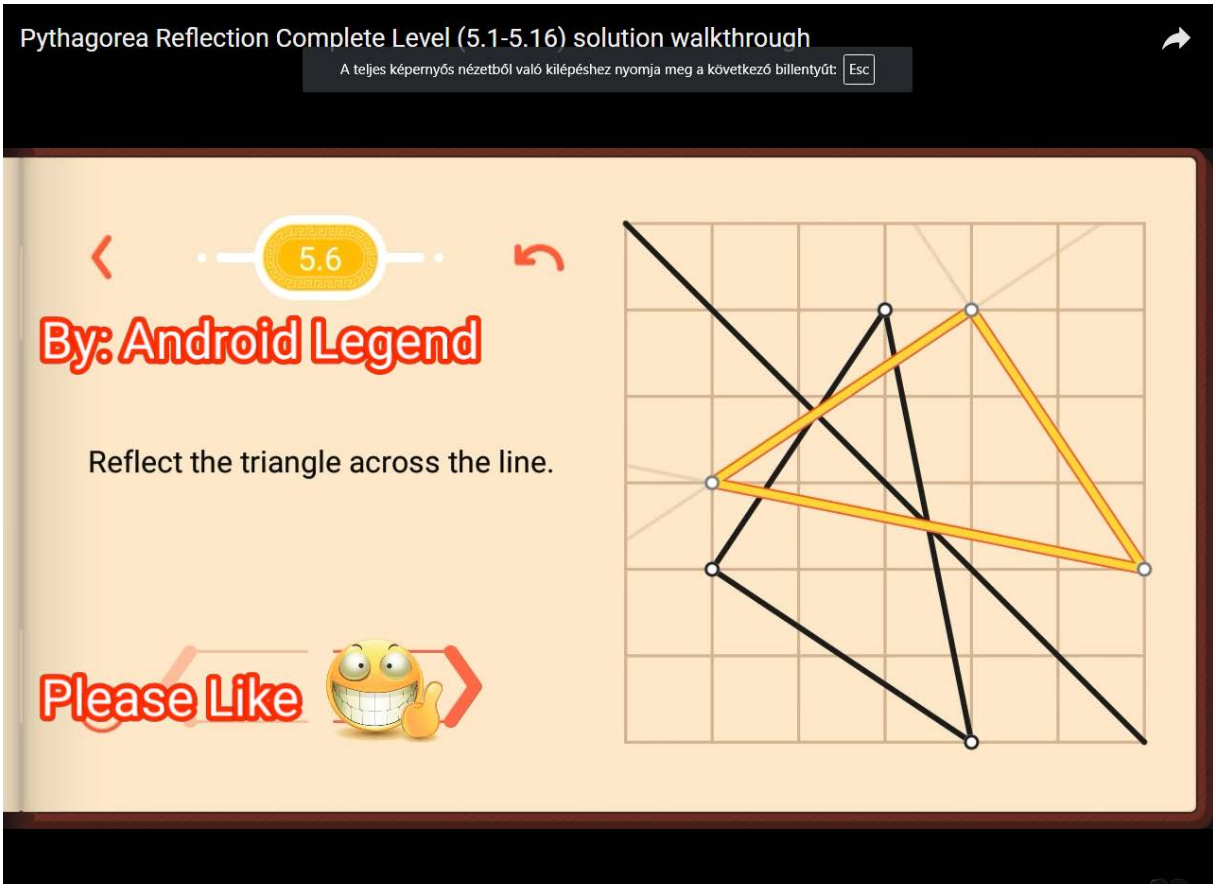
<u>Az eredmény megbeszélése:</u>

- Használjunk jól azonosítható pontokat az ábrán!
- Változott-e a kép? Milyen értelemben ugyanolyan? Mit értünk az alatt, hogy ugyanolyan alakú?
- Változhatott-e a pontok távolsága? Változhattak-e a szögek?
- Hogyan lehet szerkesztéssel megkeresni egy pont képét?

2. Feladatmegoldás – csoportos munka, ugyanazok a csoportok (10 perc)

Motivációs feladat:

Pythagorea Android alkalmazás használata, tükrözéses pályák megcsinálása. Valószínűsíthető, hogy legalább az egyik csapattagnak van alkalmas telefonja. Ha nincs, akkor esetleg táblánál megcsinálhatók a feladatok.



A feladatok megbeszélése:

Melyik volt a legnehezebb feladat? Sikerült-e végig csinálni?

b) A derékszögű koordináta-rendszer egy háromszög csúcsai: A(-1,1), B(4,3), C(-3,5). Tükrözzük a háromszöget az x tengelyre! Adjuk meg a képháromszög koordinátáit!

Új fogalmak: középpontos tükrözés (10 perc)

Definíció: Adott a sík egy O pontja. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:

O-hoz önmagát rendeljük hozzá, azaz O=O'

ha P nem = O, akkor P' a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP' szakasz felezőpontja O.

Az O pont a tükrözés középpontja (centruma).

Megértés példán keresztül:

- Vegyünk a derékszögű koordináta-rendszerben egy P(-3,-5) pontot. Ezt tükrözzük az x tengelyre (P’), majd az y tengelyre (P’’).
- Ekkor látszik, hogy PP’’ szakasz felezőpontja az origó. A P pont origó centrumú középpontos tükrözése a P’’ pont.

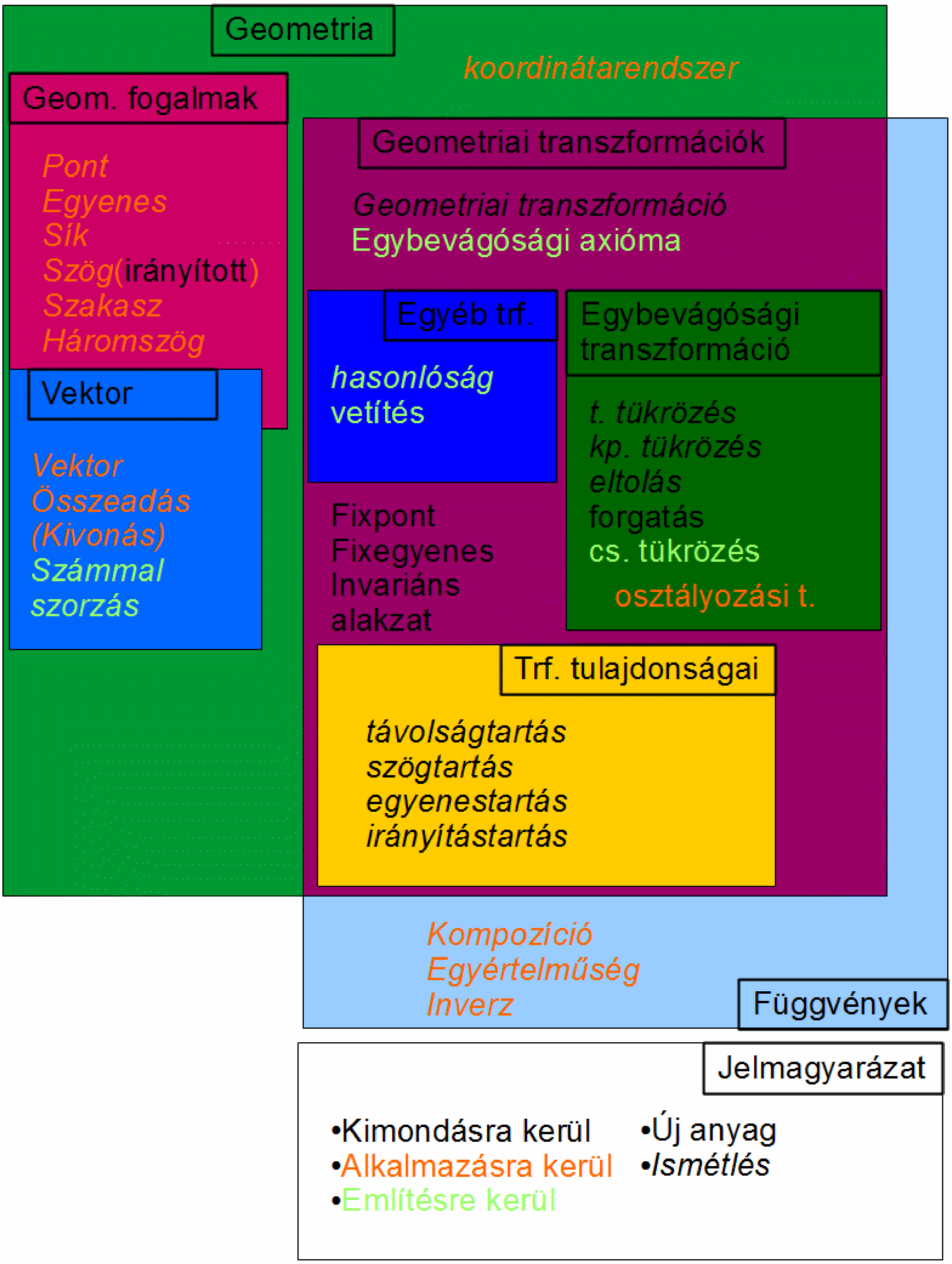
<u>**Feladatmegoldás, házi feladat feladása – egyéni munka** (5 perc)</u>

a) Adott egy háromszög a derékszögű koordináta rendszerben: A(-1,1), B(-5,1), C(-1,5) és a képe: A’(1,-1), B’(-1,5),C’(1,-5). Bizonyítsuk be, hogy az első háromszög origó centrumú középpontos tükrözése a második háromszög!

b) Tükrözzünk egy háromszöget minhárom oldalának felezőpontjára! Az eredeti és a három képháromszög egyesítése milyen síkidomot határoz meg? Az észrevételt indokoljuk!

<u>**Házi feladat befejezni! Megbeszélés a következő óra elején ismétlésként.**</u>

Fogalomtérkép



9. órai óravázlat

Témakör	**Az óra anyaga**	**Szemléltető eszközök**
Egybevágósági transzformációk	Egybevágóság keresése	BluTack, színes karton síkidomok
Előismeretek	**Az óra típusa**	**Munkamenet**
Szerkesztés, előző órák: különösen transzformációk szorzata	Új anyagot feldolgozó/ elmélyítő	Frontális tanítás, csoportos és egyéni munka

Fejlesztendő területek:

Ismeretek: a tanuló jobban megismeri az egybevágósági transzformációk hatásait a geometriai alakzatokra nézve; tapasztalatain keresztül elsajátítja a geom. trf. osztályozási tételét és az egybevágósági axiómát; felismeri ezen keresztül az irányítástartás szerepét

Készségek: képes az inverz gondolatmenet tudatos alkalmazására; képes algoritmikus eljárások tudatos alkalmazására

Attitűdök: fontosnak tartja a tanultak rendszerezését, egyszerűsítését, strukturált alkalmazását; törekszik a tapasztalatait létrehozó folyamatok felderítésére; igényli a modell és a kézzelfogható valóság összekapcsolását

További támogatott kompetenciaterületek: képes és törekszik másokkal való együttműködésre munkája során; képes eredményeit és kérdéseit megfelelően kommunikálni, ezekkel kapcsolatos szorongásait leküzdeni; képes rá és törekszik arra, hogy tapasztalataiból induktív következtetést vonjon le; képes rá, hogy saját hiányosságait felismerje és leküzdje

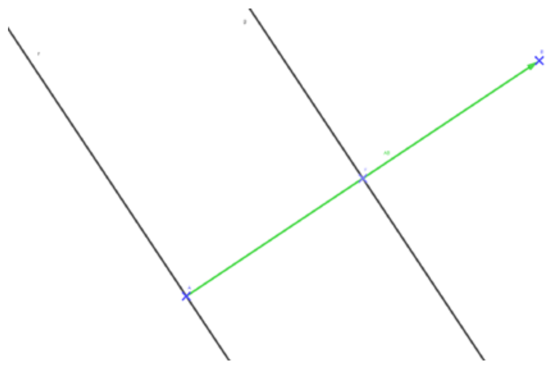
Az óra áttekintése:

Házi feladatok áttekintése, előző óra felidézése (5+ perc):

Az előző órai anyag (geometriai transzformációk szorzata, egyszerűsítése) feladataiból néhány tanulócsoportnak fennmaradtak feladatok (például: milyen transzformációt adhat egy eltolás és egy forgatás egymást követő alkalmazása?) rövid áttekintése. Az áttekintés során táblai vázlat készül(ábra), és kiemelendő néhány kulcsfontosságú gondolat:

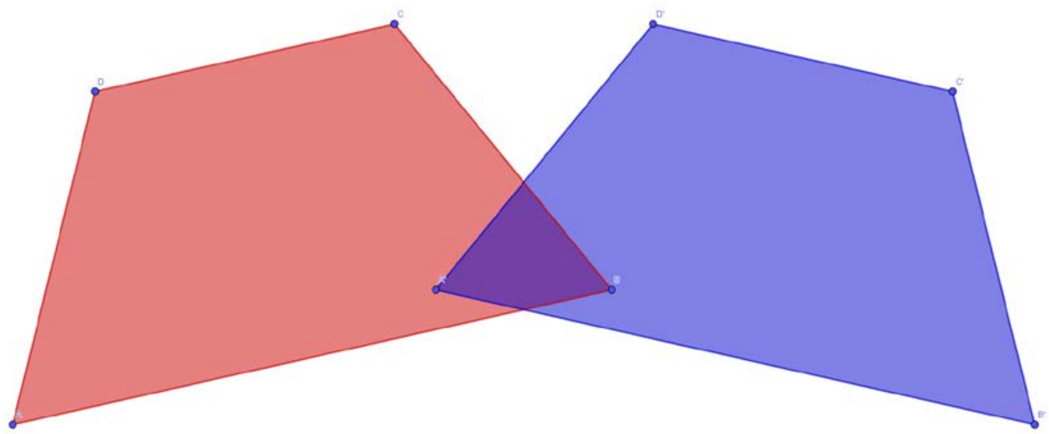
- Az egybevágóságokat tengelyes tükrözésekre bontjuk
- A felbontás során néha szabadságunk van a tengelyek megválasztásában
- Igyekszünk olyan tengelyeket választani, hogy egymás utáni tükrözések tengelyei egybeessenek

Táblai ábra része: Eltolás



Ráhangoló közös feladatmegoldás (10- perc)

Feladat: Milyen transzformáció vitte a piros síkidomot a kékbe? (forgatás)



Kérdések/Instrukciók:

- Melyik transzformációk gyanúsak? - lehetőleg az összes típust soroljuk fel, még ha ki is zárjuk őket később
- Az egybevágóságok különbözőképpen(kétféleképp) viselkednek. Ez alapján kizárhatunk valamit?
- Vizsgáljuk meg az egyes pontokat/szakaszokat milyen transzformáció vihette egymásba!
- Ha rájöttünk, hogy csak forgatás lehet, hogyan találjuk meg a szöget és a középpontot? Milyen tulajdonság nem változik a forgatás során?(kp-tól való távolság)
- Mire jó ez? Hol lehet a középpont?

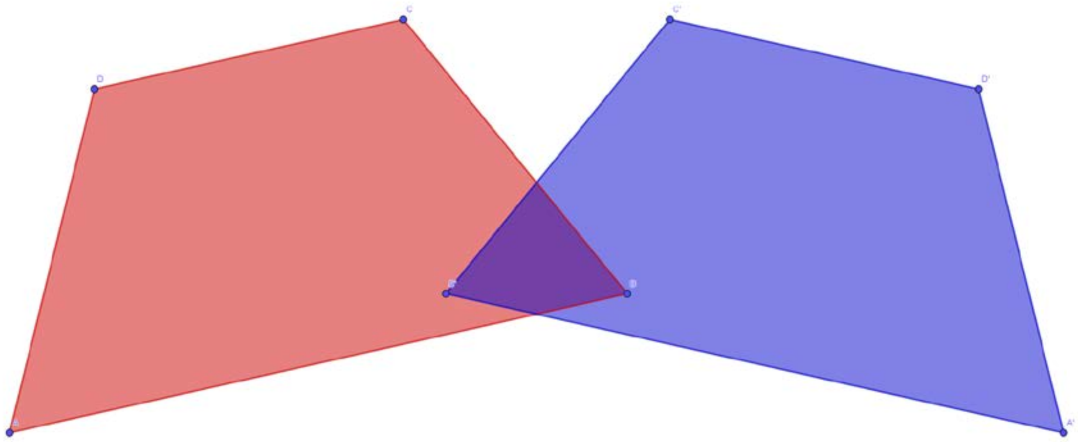
Alternatív megközelítés(eddigiek a táblán maradnak) tanári magyarázattal:

1. Vigyük tengelyes tükrözéssel az egyik pontot(A) a képébe(felezőmerőleges).
2. Majd a többi pontot is tükrözzük erre az egyenesre.
3. Az új síkidomhoz keressünk olyan tükörtengelyt, ami áthalad A'-n és egy újabb pontot visz a képébe.
4. A többi pontot tükrözzük az egyenesre.
5. Ha még nincs minden pont a helyén, tükrözzük az eddigieket A'B' egyenesére.
6. Egyszerűsítsük az 1-2-3 tükrözést a korábban tanultak szerint egyszerűbb formára.

Csoportok újraalakítása, 2. feladat megoldása(5+ perc)

A megszokott/előző órai csoportok(3+ fő) újraalakulnak. Kapnak egy ábrát nyomtatva, feladatuk, hogy meghatározzák a létrehozó transzformációt. Átbeszéljék a megoldás menetét, hogy mindenki külön-külön is hatékony legyen. Felhívás: a lapot be kell adni óra végén.

A megoldás közben felkészülni a következő feladatra: síkidomok előkészítése, instrukciók felírása.



A feladat megoldása tükrözés volt. Rövid megbeszélés, esetleges problémák kezelése.

Csoportos feladatmegoldás – rotáció (maradék idő)

Instrukciók:

- Mindenki választ egy egybevágó síkidompárt, és kigondol egy (új) egybevágósági típust.
- Elkéri a jobbra ülő füzetét, belerajzolja az egyik síkidomot, és végrehajtja rajta a kigondolt egybevágóságot és ezt is körberajzolja – mindezt úgy hogy a másik ne lássa. (Ha nem egyértelmű elnevezi a pontokat)
- Visszaadja a füzetet, és dolgozik a saját feladatán.
- Felírja a kinyomtatott papírra, hogy milyen típusú feladatot adott a másiknak, hogyan oldotta meg ő a feladatot. És felírja a saját feladatának megoldási módszerét, esetleges tapasztalatait.

Tanári segítség és ellenőrzés a munka közben.

Közös megbeszélés (6-7 perc)

Tapasztalatok összegyűjtése: felmerülő problémák, új módszerek, megfigyelések

Ha nem hangzik el kiemelendő:

- Egybevágósági axióma/alaptétel: Két egybevágó síkidomhoz pontosan egy egybevágóság létezik.
- Osztályozási tétel: Minden egybevágóság visszavezethető a tanultakra + csúszótükrözés
- Nem csak tükrözéssel működik a tanult módszer, hanem beépíthető akár eltolás vagy forgatás is.
- Ilyen és hasonló transzformációkat használnak mérnökök, grafikusok, programozók, fizikusok objektumok mozgatásához, ábrázolásához különböző szemszögekből.

Kötelező vagy ajánlott házi feladatok feladása, a nyomtatott lapok begyűjtése az óra végén.

Nyomtatott lap

Egyik oldalán a második feladat ábrája szerkesztés céljából.

Másik oldal:

Ezt a feladatot adtam	Kapott feladat kicsi vázlata	Megoldásom, megjegyzések

Dolgozat (45 perc)

Minden feladatban indoklás szükséges!

Bizonyítsd, hogy van olyan… állításnál elég egy példát bemutatni az igazoláshoz, míg *bizonyítsd, hogy minden…* típusú állításoknál elég egyetlen ellenpéldát mutatni a cáfolathoz. A többi esetben általános példákat használjunk a bizonyításhoz!

1.(4p) Találj ki olyan geometriai transzformációt, amiről nem tanultunk (azaz nem egybevágósági, nem középpontos hasonlóság, nem párhuzamos vagy merőleges vetítés). Indokold, hogy miért felel meg a definíciónak!

2.(5p) Mi a különbség fixegyenes és invariáns egyenes között? Mutass egy egybevágóságot, egy fix egyenessel és egy tőle különböző invariáns egyenessel.

3.(7p) Tükrözzük P(-3;5) pontot arra az egyenesre, ami az y tengellyel párhuzamos, és tőle kettő távolságra jobbra van! Majd tükrözzük a kapott P'-t az y tengelyre! Mik P' illetve P'' koordinátái? Végezzük el ugyanezt egy Q(a;b) ponttal, aminek koordinátáit nem ismerjük! Mik Q' illetve Q'' koordinátái?

4.(8p) Határozz meg szerkesztéssel egy (nem összetett pl forgatás+tükrözés) egybevágósági transzformációt, ami az alábbi RS szakaszt R'S'-be viszi! Van-e más megoldás?

5.(4p) Biliárdozásnál el lehet-e találni a fehér golyóval a vonalkázottat a fekete érintése nélkül? (Be nem rajzolt falat nem lehet használni, és a golyót nem 'csavarjuk') A berajzolt szakasz érinti mindkét kört.

6.(4p) ABC derékszögű háromszög oldalaira négyzeteket emeltünk(ábra). Mutassuk meg, hogy ABG háromszög egybevágó CAD háromszöggel! Mutass még két egybevágó háromszöget, amit az ábra pontjai jelölnek ki(ezt már nem kell indokolni)!

7.(8p)Igazold vagy cáfold az alábbiakat:

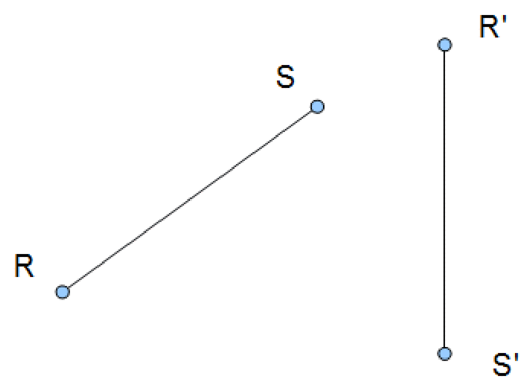
a) Van olyan öt tengelyes tükrözés, amik egymás utáni alkalmazása egy 90 fokos forgatás.

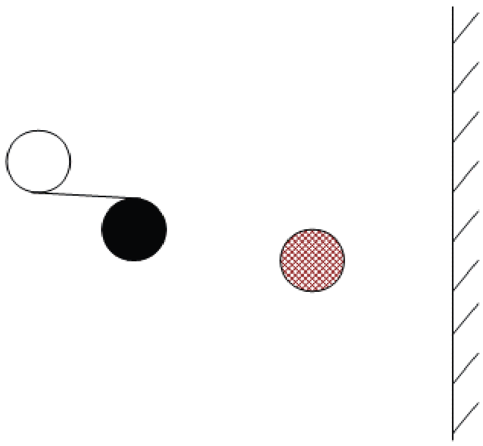
b) Van olyan két forgatás, amik egymás után eltolást adnak ki(ami nem nullvektorral tol el).

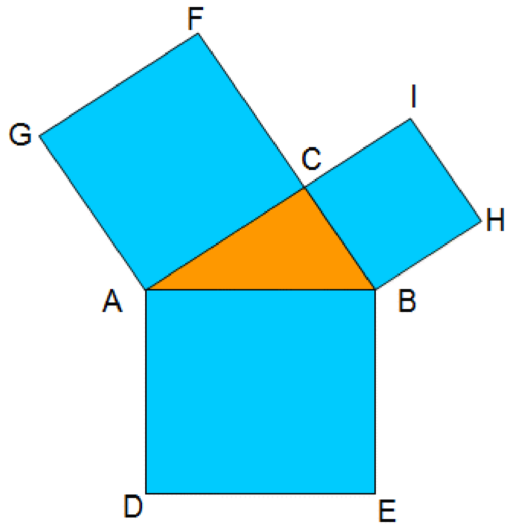
c) Minden geometriai transzformációra igaz, hogy a transzformáció szabályából, és a pontok képéből, megszerkeszthetőek az eredeti pontok.

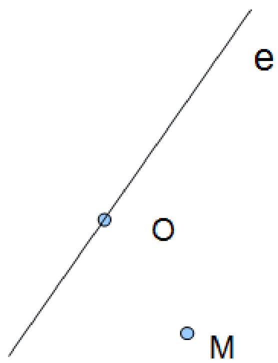
d) Van olyan síkidom aminek van két szimmetriaközéppontja.

8.(4p) M pontot elforgattuk O körül -120 fokkal, majd tükröztük e egyenesre. Szerkeszd meg a kapott M'' pontot!


R'
S
R
S'




F
I
G
C
H
A
B
D
E


e
O
M

1) Megad egy pont-pont függvényt, ami a sík/tér pontjain értelmezett. 2 pont ha minden pontnak van képe, és 2 pont ha pontosan egy képe van minden pontnak, és ez indoklással szerepel. 1-1 pont levonandó, ha valamelyik indoklás hiányzik.

2) 2 pont ha rámutat a definícióban az eltérésre. 1 pont jár akkor, ha az egyik fogalmat helyesen értelmezi.
3 pont ha a tengelyes tükrözésnél fixegyenesnek a tengelyt, invariáns egyenesnek egy erre merőleges egyenest adott meg. 2 pont jár akkor ha különböző hozzárendelésekkel mutatja be a fogalmakat. 1 pont jár akkor, ha csak az egyikre hoz példát.

3) 2 illetve 1 pont, ha P'(7;5) és P''(-7;5) és ezeket egymás utáni tükrözések eredményeképp kapta. Ha előbb P''-t számolta eltolásként akkor erre jár 2 pont, és az y-tengelyre tükrözés itt is 1 pontot ér.
Q pont tükrözésénél az előzőhöz hasonlóan 3 illetve 1 pont jár, és az 1 pont az y tengelyre való tükrözés esetében.

4) 1 pont jár ha egyik pontot a képébe viszi egy tengelyes tükrözéssel(felezőmerőleges), és további 1 pont ha a másik pont tükörképét megszerkeszti erre az egyenesre. 1 pont jár azért ha ez utóbbi pontot egy újabb tükrözéssel a helyére viszi, és további egy pont, ha rámutat, hogy ez fixen hagyja a másik pontot. 1 pont azért, ha leírta, hogy ez így forgatást ad.
Amennyiben más kétlépcsős utat választ (pl eltolás+forgatás), akkor analóg módon alkalmazandó a 2*1+2*1+1 pontos eljárás. Amennyiben több transzformációval oldja meg a feladatot helyesen teljes pontszámot kap, de 1 pontot veszít ha nem vezeti vissza egyszerűbb alakra, valamint 1-1 pontot veszíthet ha az egyik transzformációt helytelenül végzi el, vagy nem alkalmazza a másik pontra.
Amennyiben más indoklással jön rá, hogy forgatás lehet megoldás 2 pontot kap teljes indoklásnál. A forgásközéppont megadása további 1-1 pont, ha indokolta is miért felezőmerőlegesek metszéspontját keressük még egy pontot kaphat.(Összesen 5)
3 pont jár azért, ha felvesz egy harmadik pontot, és megmutatja, hogy ennek képe két helyen is lehet(irányítástól függően). 3 pont jár akkor is, ha megmutatja, hogy egy harmadik R'S' tengelyű tükrözés(vagy első RS tengelyű) nem változtat a megoldáson, viszont lényegesen különböző transzformációhoz vezet. Ha nem oldja meg a feladatot, de hivatkozik az irányítástartás kétértelműségére, akkor 2 pont adható, vagy 1-1 pont adható, ha kizárja a tengelyes tükrözéseket illetve az eltolásokat.

5) 1 pont jár azért, ha a közös érintőt meghosszabbítja. 2 pont jár azért, ha tükrözi az egyenest a beesési merőlegesre, vagy a labdát a fal egyenesére. További egy pont jár azért, ha megindokolja ennek az egyenesnek a szerepét.

6) 3 pont jár azért, ha rámutat, hogy A pont körül 90 fokos forgatással ADC átmegy ABG háromszögbe. Egyenként, de összesen 2 pontot veszíthet, ha nem mutat rá, hogy AC=AG és AB=AD; DAB = 90 fok CAG = 90 fok. Amennyiben a háromszögek egybevágóságának alapeseteire hivatkozik 1 pontot kap minden indokolt egyenlőség után. További 1 pont kap, ha kiválasztja ABH és EBC háromszögeket.

7a) 2 pont ha rámutat, hogy a kompozíció irányításváltó ezért nem lehet forgatás.
7b) 1 pont ha különböző középpontú, de ellentétes szögű forgatást választ. 1 pont ha rámutat, hogy a tengelyes tükrözésekre való felbontásnál választhatóak úgy a tengelyek, hogy a középső kettő kiessen, így két párhuzamost tengelyt kapva.
7c) 2 pont ha mutat egy nem invertálható geometriai transzformációt.
7d) 1 pont ha rámutat, hogy a kompozíció eltolás, és további 1 pont, ha valahogyan jelzi, hogy minden eltolásinvariáns alakzat nem korlátos.

8) 2-2 pont jár, ha a transzformációkat egymás után helyesen végzi el. Különben 1 pont jár a segédegyenes felvételéért 1 pont jár az arra való tükrözésért, és 2 pont annak megindoklásáért, hogy miért nem kellett e-re tükrözni.