

Függvények tulajdonságai, transzformációk

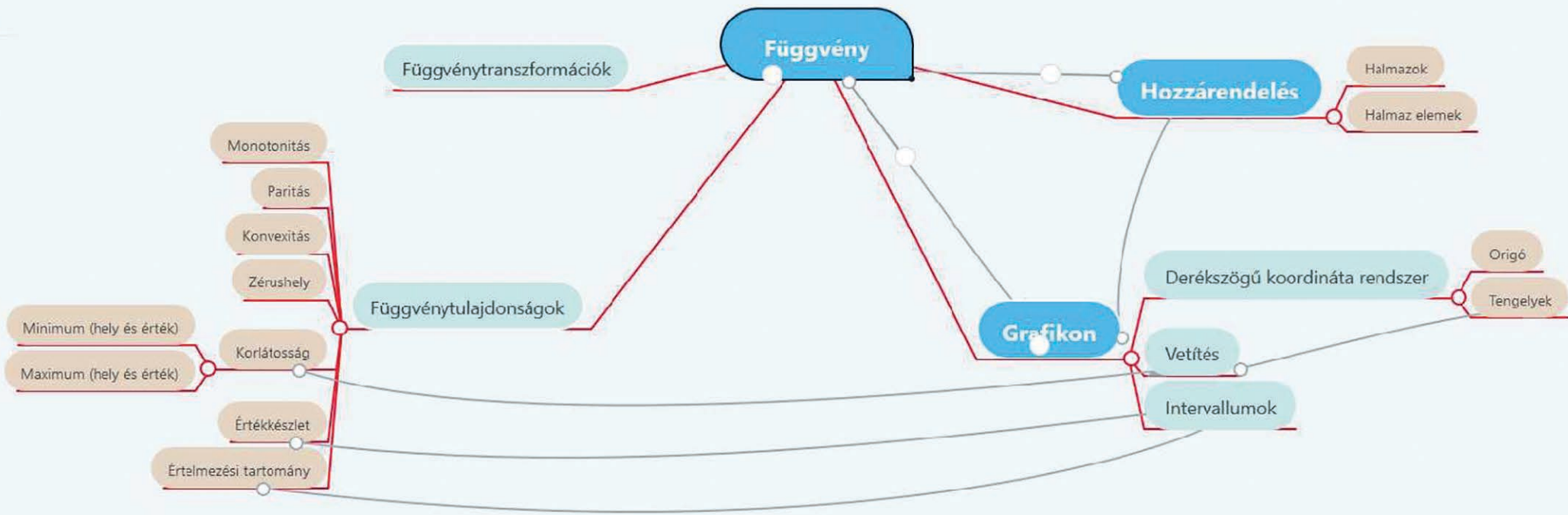
9. általános tanítási tervű osztály számára

Készítették: Fehér Ádám, Padányi Ádám

Matematika tanítása 4 (mm5t2ms8g)

Gyakorlatvezető: Wintsche Gergely

2018.04.25.



Függvénytan tanmenet

Az alábbi tanmenet egy négyosztályos gimnázium 9. osztálya számára készült, nem kiemelkedő képességű és jellemzősen nem matematikai érdeklődésű, tehát nagyrészt középszintű érettségire készülő diákoknak.

Az alapul szolgáló kerettanterv: 3.2.04_matemat_9-12 a négyosztályos gimnáziumok számára. A kerettanterv 16 órát szán erre a tananyagrésze, így 1 óra bármikor beépíthető, ha lemaradás vagy további gyakorlást igénylő helyzet áll elő.

Előzetes ismeretek: halmazok, intervallumok, abszolútérték fogalma, elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, derékszögű koordináta-rendszer ismerete és egyszerűbb grafikonok értelmezése, függvénytan alapfogalmak (7-8. osztályból, például: grafikon, pont, koordináta, stb.).

	Az óra témája	Célok, feladatok	Kapcsolódási pontok
1. óra	Bevezetés, ismétlés. Derékszögű koordináta rendszerben való tájékozódás. Függvények és grafikonok a hétköznapi életben. Egyszerű hozzárendelések szemléltetése a koordináta-rendszerben értéktáblázat segítségével.	A témakör előkészítése, motivációk. Koordináta-rendszerben való jártasság.	Földrajz – koordináta rendszerek. Matematikatörténet (függvények, koordináta rendszerek kialakulásának 1-2 lépése)
2. óra	Függvények grafikonjáról olvasás. Értelmezési tartomány, értékkészlet vizsgálat, zérushely.	Összekapcsolás előző témakörrel (statisztika, grafikonok), függvény-tulajdonságok bevezetése.	
3. óra	Általános görbék vizsgálata (értékkészlet, értelmezési tartomány, zérushely, minimum (hely és érték), maximum (hely és érték), (szigorú) monotonitás, korlátosság, periodicitás, paritás, konvexitás). Gyakorlás.	Függvénytulajdonságok bevezetése, tárgyalása és gyakorlása. Rendszerezett, következetes, logikus leírás gyakorlása.	Gazdasági grafikonok elemzése. (EEG, EKG görbék vizsgálata, hanghullámok, Hz, FSK)
4. óra	Lineáris függvények ábrázolása. Meredekség. Egyenlet képletének leolvasása görbéről és fordítva.	Egyenes arányosság grafikonon ábrázolása, koordináta-rendszerben egyenessel való természetes bánásmód. (Ismétlés)	Egyenesen arányos folyamatok ábrázolása (fizika, kémia, biológia).
5. óra	Lineáris függvények, függvénytulajdonságok Függvény-transzformációk ismétlés és gyakorlás.	Gyakorlás, feladatmegoldás, grafikonok értelmezése, elemzése. Geometriai transzformációk és egyenes egyenlete közti kapcsolat felfedezése.	Egyenesen arányos folyamatok ábrázolása (fizika, kémia, biológia).
6. óra	Röpdolgozat. Abszolútérték-függvény bevezetése, alapfüggvény meghatározása, függvénytulajdonságok meghatározása.	Tudásellenőrzés. Az abszolútérték fogalmának felelevenítése, függvényábrázolás, grafikon alapján hozzárendelési szabály kitalálása és fordítva.	Fizika: nyíróerő ábra, nyomatéki ábra
7. óra	Abszolútérték-függvény, függvény-transzformációk és hatása a grafikonra illetve a hozzárendelésre. Gyakorlás.	Dolgozat kiosztása. Függvény-transzformációk és geometriai transzformációk közti kapcsolat.	Fizika: nyíróerő ábra, nyomatéki ábra

8. óra	Másodfokú függvények, függvény-tulajdonságok, függvény-transzformációk	Parabolaívek rajzolása, Függvény-transzformációk és geometriai transzformációk közti kapcsolat.	Egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikája.
9. óra	Gyakorlás, lemaradások behozása, tanultak elmélyítése.	A függvényábrázolásról tanultak összegzése, alkalmazása, szóveges feladatok alapján függvények felírása és ábrázolása. (Írásvetítővel való transzformáció-vetítés segítheti a megértést.)	Informatika: geogebra használata
10. óra	Négyzetgyökfüggvény, lineáris törtfüggvény, függvény-tulajdonságok, függvény-transzformációk	Grafikonok gyakorlott használata, függvénytulajdonságok rutinszerű felírása.	Matematikai inga lengésideje.
11. óra	Egyenletek grafikus megoldása/ellenőrzése, ábrázolás közös koordinátarendszerben	Alternatív egyenlet-megoldási módszerrel való megismerkedés és gyakorlása.	
12. óra	Egyenlőtlenségek grafikus megoldása/ellenőrzése	Az egyenlőtlenségek megoldásáról korábban tanultak felelevenítése, a függvényábrázolás alkalmazási lehetőségei.	Gazdasági jellegű grafikonok értelmezése.
13. óra	Összefoglalás/ismétlés gyakorlófeladatokkal Függvény-transzformációk rendszerezése.	Felkészülés a dolgozatra, összefoglalás, tanultak rendszerezése.	(EEG, EKG, hanghullámok, Hz, FSK) Szemléltető eszköz behozása (mágneses egyenes, parabola, hiperbola, stb. mágnestáblára)
14. óra	Dolgozat	Ismeretellenőrzés	
15. óra	A dolgozat megbeszélése	Feladatoknak diákok segítségével történő közös megoldása, általánosan jelentkező hibák kijavítása, megbeszélése.	

A nem emelt OFI-s tankönyvek a statisztikát veszik közvetlenül a témakör előtt, ahol megismerkednek a diákok grafikonokkal. A tankönyv 2. kötetében szerepel a témakör, lassú bevezetés (hozzárendelés, mi a függvény, grafikonon ábrázolás) után az egyenes arányosság és fordított arányosság segítségével alkotja meg a lineáris függvényeket és a lineáris törtfüggvényeket. Az abszolútérték függvények után vesz egyes függvénytulajdonságokat, majd minden egyes anyagrész után újra egye-egyét. A Sokszínű matematika tankönyv közel az általunk is használt rendszerben taglalja ezeket az ismereteket.

A téma folytatásaként 10. és 11. osztályban a szinusz, koszinusz, tangens, logaritmus, exponenciális függvények ábrázolása és ezek függvény-transzformációja kerül terítékre.

Matematikatörténethez kapcsolódó ismeretek,

melyek illeszkednek a tanmenethez:

Koordinátageometria

Ptolemaiosz (Kr. u. 1-2. század) – földrajzi szélesség, hosszúság

Oresme (14. század, Normandia)

Sebesség-idő grafikon rajzolása.

Descartes (17. század, francia)

A függvényfogalom első definíciója (a függvény egy megfeleltetés).

Fermat (17. század, francia)

Változó mennyiségek matematikája

Euler (18. század, svájci)

Az f -et kezdi használni ($f(x)$)

Függvényen értjük a változók és a konstansok közötti kapcsolatot leíró kifejezést, ha az analitikus műveleteket tartalmaz (alpműveletek, hatványozás, gyökvonás, sorbafejtés, differenciálás, integrálás).

Mivel szinusz és koszinuszfüggvényeket majd csak 10. és 11. osztályban fogunk venni, ezeket mint általános görbéket lehet említeni, melyek transzformációja hasznos az alább kifejtettek leírására és modellezésére.

EEG-elektroencefalográfia, agyhullámok vizsgálata

Az egésznek az az alapja, hogy az EEG görbék közül adott állapotban különböző frekvenciájú és amplitúdójú jelek (pl. nyitott szemnél az alfa, csukott szemnél a béta, mély alváskor a delta) a jellemzőek. Ezért ha meg tudjuk mondani, egy gyors elemzéssel, hogy melyik például a jellemző frekvenciatartomány és annak mennyi a teljesítménye, akkor tudjuk, hogy az adott EEG görbe milyen állapotban készült – így fel lehet térképezni, hogy az egész éjszakán át EEG-monitorozott páciens mikor milyen alvási fázisban volt. Minden ilyen görbe felosztható különböző fázisban lévő sin és cos hullámok összességére. Ehhez pedig kiváló módszer a Fourier-transzformáció: Az EEG hullámainak kvantitatív elemzésekor a regisztrátumot időben egymást követő, előre definiált hosszúságú (leggyakrabban 4–20 másodperc hosszú) szakaszokra osztják, majd ezeken a fizikából ismert matematikai eljárást az ún. gyors Fourier-transzformációt (Fast Fourier-Transformation, FFT) végzik el. Ennek alapelve az, hogy egy adott időintervallumban látott EEG hullámok, amelyek eltérő

frekvenciával, amplitúdóval és fázissal rendelkeznek, szinusz és koszinusz hullámok összegeként leírhatóak. Az FFT eredménye arra ad információt, hogy az adott időszakban az adott frekvenciájú hullámoknak mekkora volt az amplitúdója és milyen a fázisa. Az FFT eredményeként keletkező ún. teljesítményspektrum (power spektrum) már számszerűen és szemléletesen mutatja az elemzett EEG-szakasz hullámösszetételét, a domináns frekvenciát vagy frekvenciákat. Nagyon hasonló módszert alkalmaznak EKG görbék elemzésére is, **hogy ne az amúgy is túlterhelt kardiológusnak kelljen órákon át végignyálgatnia egy-egy páciens görbéit (gyakran 24-48 órás, akár egy egész hetes regisztrátumokat is készítenek). Az orvos munkáját ki lehet váltani olyan programmal, mely szintén sin és cos görbékre osztva kijelöli a normálistól eltérő részeket.**

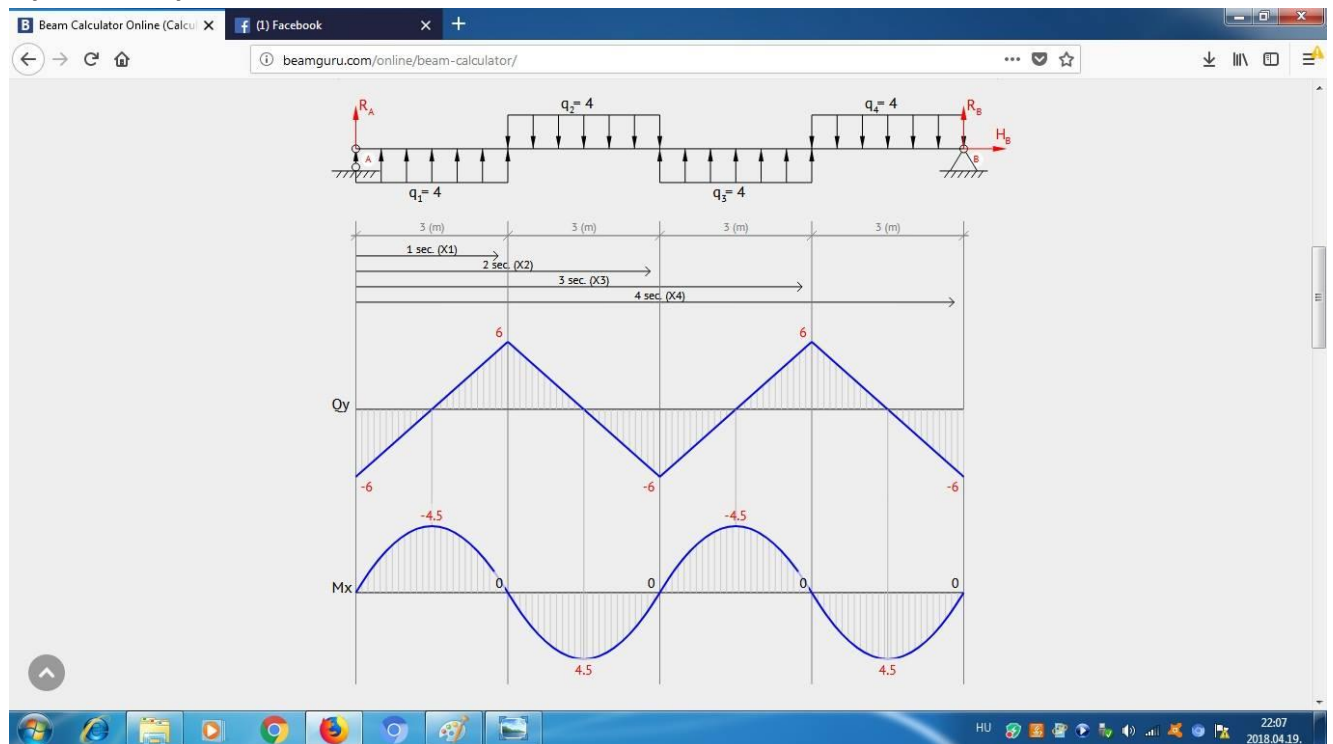
Fizika

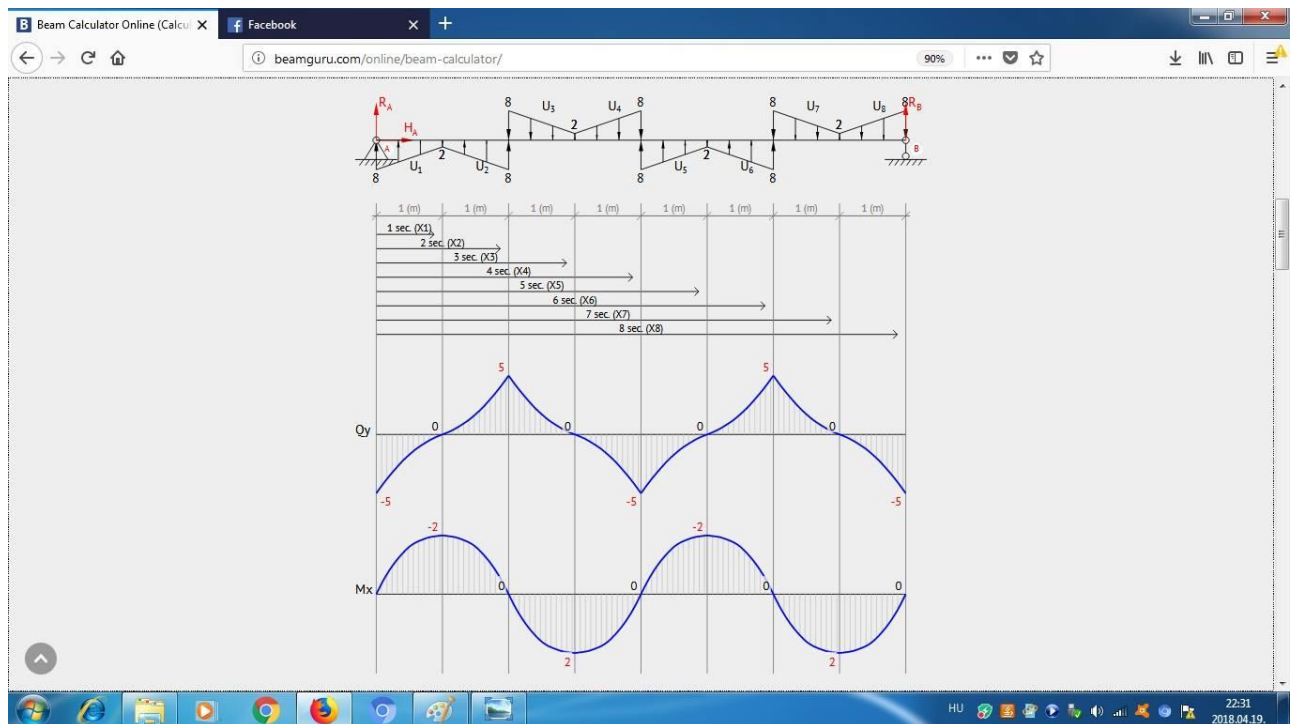
Hanghullámok, mint függvények. Minél hangosabb beszéd, annál nagyobb a függvény külső szorzótényezője. Minél magasabb a hang, annál nagyobb a függvény belső szorzótényezője.

Mit jelent a **Hz**? 1 másodperc alatt hány periódus megy le. 440 Hz – A hang.

FSK = Frequency Shift Keying során az a adatokat úgy kódoljuk és küldjük el, hogy például a bináris kódolásnál a 0 és a 1-nek is megfelel két nagyon különböző Hz-ű váltóáram. A fogadóállomás pedig így tudja visszafejteni, hogy melyik karakter után mi következik.

Nyíróerő és nyomaték





Egyik oldalon fix csukló, másik oldalon csúszó csukló.

Terhelés különböző faldarabokkal például.

Felső grafikonon a nyíróerő (elcsúszni igyekszik egymáson a két test), alsón mindig a nyomaték látszik (nyomatéki ábra).

Az első ábránál a nyíróerő ábra abszolútérték-függvény transzformáltja, míg a nyomatéki ábra másodfokú darabokból áll. Az alsó esetében a nyíróerő ábra harmadfokú elemekből áll, míg a nyomatéki ábra negyedfokúakból.

Óravázlat

Osztály (osztálylétszám): osztály, matematikából kevésbé jók csoportja

Tantárgy: matematika

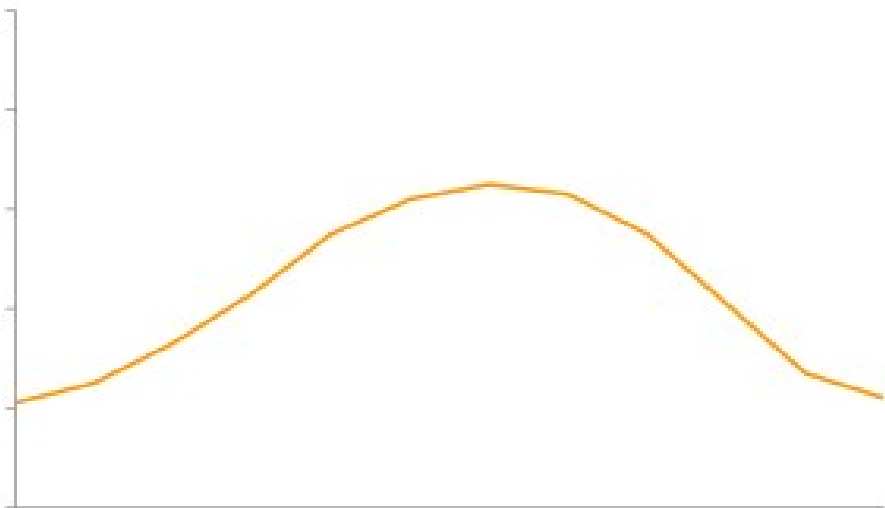
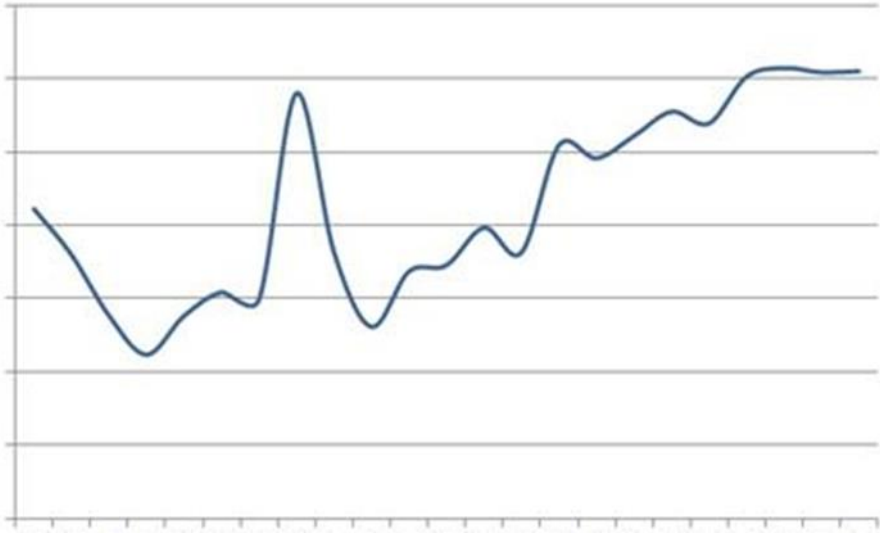
Témakör: függvény transzformációk és tulajdonságai

Tananyag: Általános görbék vizsgálata

Az óra típusa: új ismeret

Az óra célja: Értékkészlet, értelmezési tartomány, zérushely, minimum (hely és érték), maximum (hely és érték), (szigorú) monotonitás, korlátosság, periodicitás, paritás, konvexitás fogalmainak megértése, rutinos leolvasásuk egy-egy adott függvényről. Gyakorlás.

Idő	Az óra célja	Az óra menete	Munkaformák
0-3 perc	Az óra megkezdése.	Köszönés, naplóvezetés és a tanári eszközök előkészítése	
4-11 perc	A tanulók maguk fedezik fel, hogy a függvény bizonyos értékek között mozognak, miket vesznek vagy nem vesznek fel stb.	Az előző órai grafikonok elővétele, precízebb vizsgálatuk.	Közös megbeszélés- A táblára kivetítjük az írásvetítő segítségével az előbb említett grafikonokat.
12-24 perc	Függvénytulajdonságok bevezetése, tárgyalása.	Az eddig tárgyalt grafikus megoldáshoz használt ábrákban való nevezetes adatok megnevezése és azok leolvasásának elsajátítása.	Csoportos munka. Minden csoportnak külön-külön grafikonon megkérdezni milyen jellegzetességeket vélnek felfedezni. (Ha elakadás van akkor finoman fel lehet tenni kérdéseket, a fogalmat még nem használva; pl.: Mi a függvény legalacsonyabb értéke? Hol lejt, hol emelkedik, esetleg „sima”? (Lásd a feladatokat az alábbi dokumentum alján)
25-35 perc	Rutin , tapasztalat szerzése. A jövőbeli feladatok gyors megértése, célravezető megoldásuk megtalálása.	Ezek rendszerezett, következetes, logikus leírásuk gyakorlása.	Behozott, előre felvázolt függvények behozása és lap hátát felfele tartva körbe járni és mindenki húzz magának egyet. Egy lapon 4db és 8 különböző lap.
35-42 perc	Saját magunk leellenőrzése. Kooperáció, együttműködés erősítése	A feladatok közül pár megbeszélése	Párokba állni és a másoknak az ábrái közül legalább kettőt kiválasztani és az arról leolvasott értékek leellenőrzése.
43-45 perc	Gyakorlás.	Házi feladatok kiírása	



Óravázlat – 12. óra

Tanítás helye:

Tanítás ideje:

Osztály (osztálylétszám): .. osztály, matematikából általános osztály (.. fő)

Tantárgy: matematika

Témakör: függvények alkalmazása

Tananyag: egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Az óra típusa: új ismeret átadó

Az óra célja: Ez egyenlőtlenségek grafikus megoldási módszerének elsajátítása, a függvényábrázolás és a matematika más területeinek összekapcsolása.

Az óra előzménye: Az előző órákon függvényábrázolással és függvény-transzformációkkal, a közvetlenül megelőző órán egyenletek grafikus megoldásával foglalkoztunk.

Egyenlőtlenségek algebrai megoldási módszereit a csoport már ismeri.

Eszközök:

Tanári: tábla, kréta

Tanulói: füzet, ceruza, vonalzó, munkafüzet (jelen esetben feladatlap)

Idő	Az óraegység célja	Az óra menete	Munkaformák
1-10'	Óraszám felírása, házi feladat ellenőrzése	Házifeladatok ellenőrzése. (Részfeladatok esetén 1 megbeszélése táblánál diák magyarázatával, a többi részfeladatnál pedig az eredmények egyeztetése.)	Frontális.
11-20'	Előismeretek felidézése, egyszerű relációk megoldáshalmazának jelölése grafikonon.	A feladatlapon 3. feladatot mindenki önállóan megoldja tetszőleges módszerrel (sejtés: az ismert algebrai megoldást alkalmazzák). Utalunk az előző órán tanultakra: vajon egyenlőtlenségek esetében is hasznunkra lehetnek a függvények? Utalás gazdasági grafikonokra, hogyan is látszik, hogy melyik bankot, telefonszolgáltatót vagy befektetést válasszuk például.	Páros, majd a második felében frontális munka.
21-30'	Egyenlőtlenségek grafikus megoldásának alapjainak bebiztosítása.	A feladatlapon a 4. feladat ábrázolásait önálló munkában rajzolják fel, majd közösen beszéljük meg a hozzá tartozó kérdéseket. Ha bármiféle elakadást vagy problémát tapasztalunk az értelmezésnél, mely alapján azt feltételezzük, hogy nem sikerült megérteni, próbáljunk újabb kérdéseket feltenni úgy, hogy azt egy diáktársuk válaszolja meg.	Irányított frontális munka.
31-40'	Ismeretek megbeszélése, diáktársak általi elmélyítés. Ellenőrzött mintafeladatok a házi feladat elkészítéséhez	A feladatlapon az 5. feladat megoldása csoportmunkában, az eredmények egyeztetése, szükség esetén kifejtése. (Sok idő esetén a 6. feladat részfeladatait nézzük meg jutalompont fejében elmagyarázhatóak a táblánál)	Csoportmunka (3-4 fős csoportok) vagy páros munka

41-45'	Óra lezárása, következő óra témájának felvezetése, emlékeztetés a témazáró dolgozat időpontjára.	Függőben maradt tanulói kérdések megválaszolása, házi és szorgalmi feladatok kijelölése (1., 2., 3. feladat a feladatlap alján).	Frontális
--------	---	---	-----------

Házi feladat előző óráról:

1. Ábrázold a következő függvényeket, határozd meg a szélsőértéküket, ha van!

a. $f(x) = |x-2| - 4$

b. $g(x) = \left| -\frac{2}{3}x \right|$

2. Add meg az alábbi grafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt! (A tényleges feladatban persze tényleg grafikonok vannak, alább a megoldásokat közöljük.)

a. $\frac{3}{4}x + 1$

b. $|2x| - 1$

Órai feladatok:

3. $|x-5| < 1$

4. Ábrázold derékszögű koordináarendszerben a következő függvényeket!

a. $f(x) = 3x - 4$

b. $g(x) = |x| - 5$

c. $h(x) = |2x|$

Jelöld a koordináarendszer x-tengelyén azt az intervallumot, amelyen a fenti függvények pozitív értéket adnak!

Mely intervallumon adnak 1-nél nagyobb értékeket? (Alternatív kérdéslehetőségek kitalálása mint lehetőség, ha szükséges.)

5. Oldd meg grafikusán a következő egyenlőtlenségeket!

a. $2x - 4 \leq 6$

b. $x - 3 \geq x$

c. $-\frac{1}{3}x > |x + 4|$

Ha marad idő:

6. Oldd meg grafikusán a következő egyenlőtlenségeket!

a. $4x + 2 < -x - 8$

b. $-|x - 1| \leq x - 5$

Házi feladat:

1. Oldd meg grafikusán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a. $|2x| \geq x + 3$

b. $||x| - 2| < -|3x + 2| + 4$ (szorgalmi)

2. Adj meg olyan f függvényt, amelyre

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \text{ (szorgalmi)}$$

3. Adj meg olyan f és g függvényt, amelyekre

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x < 4$$

Témazáró feladatsor

1. feladat (5 pont)

- Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, ami átmegy a P (0 ; 7) és a Q (4 ; 5)! (3 pont)
- Mekkora ennek az egyenesnek a meredeksége? (1 pont)
- Add meg a lineáris függvény zérushelyét / helyeit! (1 pont)

2. feladat (5 pont)

- Ábrázold az alábbi függvényt derékszögű koordinátarendszerben! (3 pont)
$$\sqrt{x-2} + 1$$
- Van-e a függvénynek szélsőértéke. Ha igen, akkor milyen típusú (minimum vagy maximum) és mik a szélsőértékhelye(i) és értéke(i)? (2 pont)

3. feladat (10 pont)

- Ábrázold az alábbi függvényt! (4 pont)

$$\frac{1}{2}(x-5)^2 - 2$$

- Végezd el a teljes függvényvizsgálatát a függvénynek! (6 pont)

4. feladat (4 pont)

Oldd meg az egyenletet:

$$2|x-3| + 3 = 9$$

5. feladat (6 pont)

Oldd meg grafikusán az egyenlőtlenséget:

$$x^2 - 6x + 7 \leq x - 3$$

6. feladat (2 pont)

Fogalmazd meg saját szavaiddal és magyarázd meg, hogy milyen kapcsolat van $f(x)$ és $f(2x)$ között?

7. feladat (8 pont)

Adott egy lineáris törtfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

- Mennyi $af(-1) - f(3)$? (1 pont)
- Konvex-e a függvény grafikonjának (hiperbola) egyik ága? (1 pont)
- Mennyi a függvény helyettesítési értéke $x = -2$ esetében? (1 pont)
- Milyen intervallumon monoton nő, melyeken monoton csökken (2 pont)
- Hol vesz föl a függvény 4-nél kisebb értékeket? (3 pont)

Javítási útmutató

1. feladat

- a) Feladat megértése, pontok helyes berajzolása koordinátarendszerben – 1 pont

Egyenes egyenletének meghatározása

Meredekség kiszámolása vagy leolvasása – 1 pont

Konstanstag (tengelymetszet) meghatározása – 1 pont

- b) Meredekség leolvasása egyenletből (ha rossz az előző egyenlet, de jól olvasta le, a pont megadható).
- c) Zérushely leolvasása koordinátarendszer segítségével vagy meredekség segítségével való kikövetkeztetése.

2. feladat

- a) Négyzetgyökfüggvényt ábrázol – 1 pont

Vízszintes eltolás helyes – 1 pont

Függőleges eltolás helyes – 1 pont

- b) Minimum eltalálása – 1 pont

Minimum hely és érték helyes leolvasása vagy kiszámítása – 1 pont

3. feladat

- a) Parabolát ábrázol – 1 pont

Vízszintes eltolás helyes – 1 pont

Függőleges eltolás helyes – 1 pont

Nyújtás jelezve és helyes – 1 pont

- b) Értelmezési tartomány, értékkészlet – 1 pont

Minimum, nincs maximum – 1 pont

Zérushelyek – 1 pont

Monotonitás, helyes intervallum-megadás – 1 pont

Nem páros, nem páratlan – 1 pont

Konvex – 1 pont

Nem periodikus – 1 pont

Utolsó hátról egy kihagyható, nem jár érte pontlevonás.

4. feladat

Grafikus ábrázolás esetén:

Konstansfüggvény és abszolútérték-függvény helyes ábrázolása a koordinátasíkon
2 pont

Grafikonról a közös pontok meghatározása – 1 pont

Válasz a kérdésre (a pontok abszcisszája) – 1 pont

Másik megoldás:

Helyes egyenletrendezési lépések (kivonás, osztás) – 1 pont

Abszolútérték definíciójának használata (x távolsága 3-tól) vagy esetekre bontás
használata – 2 pont

2 érték megtalálása, válaszadás – 1 pont

5. feladat

Bal oldal teljes négyzetté kiegészítése – 1 pont

2 oldal helyes felrajzolása – 1 + 1 pont

A megfelelő tartomány kijelölése ($,$ ahol érvényesül a megadott egyenlőtlenség) – 2 pont

A válasz megadása intervallumok vagy relációs jelek segítségével – 1 pont

6. feladat

Példákkal való elbeszélés, nyújtás, összenyomódás, értelemszerű elmagyarázás – 2 pont

Levonható 1 pont, ha nem pontos a válasz, hiányos magyarázat.

0 pontos a feladat, ha nem ír semmit a diák, nem indokol egyáltalán, nem érti a jelölést.

7. feladat

- Helyes behelyettesítés után kapott alpművelet elvégzése helyes. – 1 pont
- Konvexitás leírása rövid indoklással (pl.: bármely 2 pontot összekötve belső pontot kapunk, nem lehet elbújni az alakzatban, stb.) – 1 pont
- A függvény nem vesz fel semmit az adott x esetében – 1 pont
- Intervallumok helyes megadása és (szigorúan) monoton csökkenés észrevétele – 1 + 1 pont
- A két intervallum megtalálása

Helyes rajz és $x = 4$ -nél vízszintes egyenes helyes berajzolása – 1 pont (ha a feladat megoldásából kiderül, hogy ezt a gondolati lépést megtette, akkor a pont megadható)

A válasz megadása (2 intervallum vagy relációs jelekkel vagy egy intervallumból egy elem kivétele) – 2 pont

Ha a diák rossz eredménnyel számol a következő részfeladat(ok)ban tovább, de helyesen, és a probléma lényegében nem változott, a pont megadható.

Ponthatárok:

Adott osztálynál tetszés szerint változtatható.

25-30 5

21-24 4

17-20 3

13-16 2

0-12 1